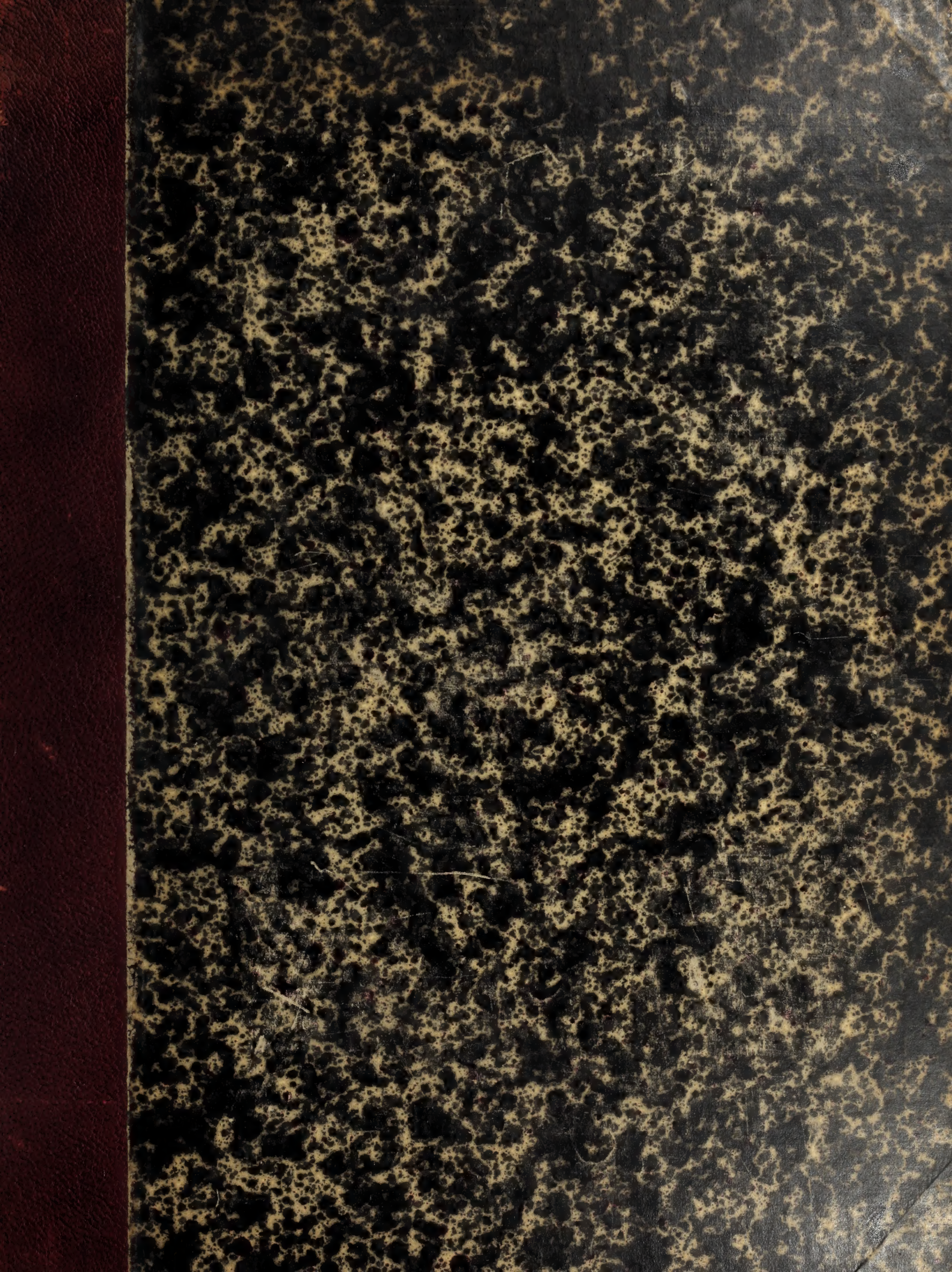



UNIVERSITY OF ILLINOIS
LIBRARY
BOOK
CLASS
VOLUME
q526.6
C13
REMOTE STORAGE



Ecole Polytechnique. 1902-1903.

1ère Division.

Cours d'Astronomie et de Géodésie.

Mr Callandreau, Professeur.

Chapitre I.

Préliminaires - Sphère Céleste - Différents systèmes de coordonnées.

1. La Terre est à peu près sphérique, son isolement dans l'espace. – Lorsqu'un vaisseau s'éloigne du port, on continue d'apercevoir la mâture alors qu'on ne distingue plus le vaisseau lui-même; la surface de la mer doit donc être convexe. En pleine mer, l'horizon paraît toujours terminé par un cercle; ce qui indique que la surface de la mer est arrondie. Sur les continents on peut faire des observations analogues: d'un lieu élevé on distingue parfois des clochers éloignés; l'horizon est terminé par une courbe peu différente d'un cercle.

D'autre part, l'observation du Ciel montre que le Soleil, la Lune et les autres astres se lèvent d'un même coté de l'horizon, à l'Est, pour disparaître ensuite à l'Ouest du côté opposé ; ils paraissent toujours assez éloignés de la Terre. Si l'on voyage les mêmes phénomènes continuent de se présenter : le Soleil, la Lune et les autres astres offrent des apparences analogues dans leurs mouvements. En généralisant ces remarques, on a été amené à conclure que la Terre était un corps à peu près sphérique, isolé dans le ciel.

6400 km On peut prendre pour le rayon de la terre en chiffres ronds, 6400 Kilomètres.

2 - Les distances qui séparent les astres de la Terre, sont, d'une manière générale extrêmement grandes vis-à-vis des dimensions de la Terre.

C Lune
Berlin
A
c
Cap B. Esp.
B

Le procédé habituel pour mesurer la distance d'un point A à un autre inaccessible C, qui consiste à déterminer une base AB et à mesurer les angles en A et B du triangle, a été appliqué à la Lune, l'astre de beaucoup le plus voisin de nous, en prenant sur la Terre deux stations A et B très éloignées.

(Berlin et le Cap de Bonne-Espérance)

60 R On a trouvé pour la distance de la Terre à la Lune environ 60 rayons terrestres. Quant aux étoiles ce n'est que dans le XIXe siècle qu'on a pu apprécier leurs distances à la Terre. L'étoile la plus proche est à une distance d'au moins 200000 fois celle de la Terre au Soleil qui est d'environ 24000 rayons terrestres.

24000 R
200 000 D

E
e
O
e'
E'

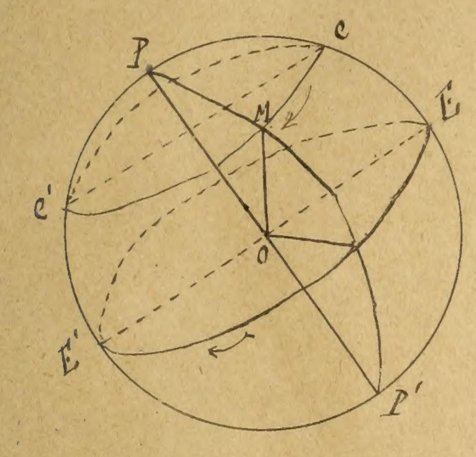
3 - Sphère céleste - Distance angulaire de deux astres. Les astres paraissent se projeter sur une surface sphérique ayant pour centre l'oeil de l'observateur. Cette sphère d'un rayon arbitraire mais très grand est dite Sphère Céleste.

Lorsqu'il s'agit de directions et non de distances, on substitue par la pensée aux positions réelles des astres E E' les points e e' où les rayons visuels percent la sphère.

istance angulaire

La distance angulaire des deux étoiles E, E' est l'angle EOE' égal à COC'.

A cause de la distance extrêmement grande des étoiles, relativement au rayon de la Terre la distance angulaire de deux étoiles quelconques ne varie pas sensiblement quand l'observateur se déplace sur la Terre. On suppose souvent par la pensée l'observateur dans une station idéale, au centre de la Terre



Axe du monde

4- Axe du monde - Pôles - Equateur Céleste - Parallèles - Distance polaire - Déclinaison - Cercle de Déclinaison.

Quand on examine le ciel étoilé, on constate que la sphère céleste tourne uniformément autour d'un diamètre fixe l'axe du monde.

La flèche indique le sens du mouvement de rotation des étoiles pour un observateur tourné vers la Grande Ourse, de droite à gauche.

Pôles

Les pôles P et P' sont les deux points où l'axe du monde perce la sphère céleste; l'un P est au dessus de l'horizon et visible en Europe; c'est le pôle boréal; l'autre est le pôle austral.

Equateur

Le plan diamétral perpendiculaire à PP' est le plan de l'équateur céleste E'E; il partage la sphère en deux hémisphères, boréal et austral.

Parallèles

Les parallèles sont les petits cercles tels que CMC' dont le plan est perpendiculaire à l'axe du monde. Dans le mouvement de la sphère céleste les étoiles décrivent des parallèles.

Distance polaire

La distance polaire d'un point M de la sphère céleste est la distance angulaire du pôle P au point M; elle se compte de 0° à 180° à partir du pôle boréal.

Déclinaison

La déclinaison du point M est l'angle du rayon OM avec le plan de l'équateur céleste; elle se compte de 0° à 90° vers les deux pôles à partir de l'équateur; boréale elle est affectée du signe +, australe du signe –. La distance polaire et la déclinaison sont complémentaires. Le grand cercle passant par M et par les pôles PP' s'appelle le cercle de déclinaison de M.

Cercle de déclinaison

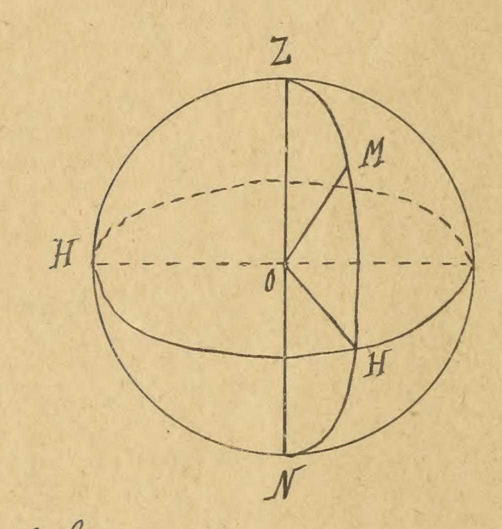
5- Remarque importante - Les anciens admettaient la fixité de la Terre; pour eux, le mouvement de la sphère céleste

Rotation de la terre

était un mouvement réel et non une apparence. Copernic (1473-1543) a montré que tous les phénomènes s'expliquaient mieux en laissant en repos la sphère céleste et en supposant que le globe terrestre tourne autour du diamètre parallèle à l'axe du monde, avec la même vitesse que la sphère céleste, mais dans le sens contraire. Cette explication n'avait pas été ignorée des anciens; mais pour diverses raisons ils avaient cru devoir la rejeter. Au temps de Copernic il pouvait subsister un doute sur la meilleure explication. Foucault a réussi à rendre sensible le mouvement de rotation de la Terre dans son expérience avec le pendule, au Panthéon.

Copernic 1473 1543

Foucault



6- Verticale - Zénith - Nadir - Plan horizontal - Horizon - Plans verticaux - Verticaux -

En un lieu donné, la verticale est la direction du fil à plomb; elle perce la sphère en deux points, l'un le Zénith Z au dessus de l'observateur, l'autre le Nadir N au dessous.

Verticale

Zénith

Nadir

Le plan diamétral perpendiculaire à ZN est le plan de l'horizon; il coupe la sphère céleste suivant un grand cercle HH qui figure l'horizon.

Horizon

Les plans qui passent par la verticale ZN sont des plans verticaux; ils coupent la sphère céleste suivant des grands cercles appelés simplement verticaux; ZMN est le vertical de M.

Verticaux

7- Systèmes de coordonnées - Coordonnées zénithales d'un point de la sphère céleste - Azimut, distance zénithale et hauteur - Pour étudier les points de la sphère céleste on les définit par des coordonnées; plusieurs systèmes sont utilisés selon le but qu'on se propose. Dans le système des coordonnées zénithales la position d'un point M de la sphère céleste peut être définie par la distance zénithale ZOM (ou la hauteur MOH complément de la distance zénithale), et par l'angle dièdre formé par le vertical de M avec un autre vertical choisi à l'avance.

Coordonnées Zénithales

Distance zénithale

Hauteur

Cet angle dièdre appelé azimut se compte habituellement à partir du Sud vers l'Ouest de 0° à 360°.

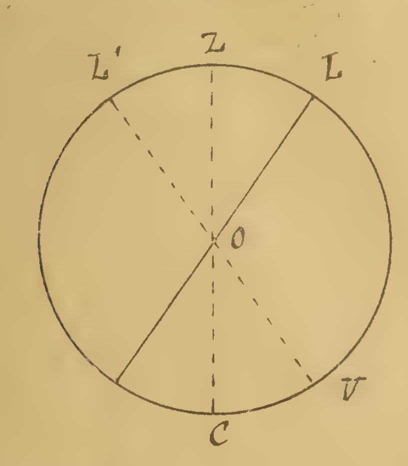
Azimut

8. Théodolite — L'instrument propre à la mesure des distances zénithales (ou des hauteurs) et des azimuts est le théodolite. Le principe de l'instrument est le suivant :

Une lunette L L' est mobile dans le plan du limbe vertical V autour du centre O ; une alidade est liée à la lunette. Le limbe vertical V peut tourner autour de l'axe vertical OC de l'instrument, en entraînant l'alidade CA mobile autour du centre C sur le limbe divisé horizontal H.

Mesure d'un azimut — Pour avoir l'angle compris entre le vertical du point M, soleil, étoile .... et le vertical origine passant par un point repère, on vise successivement les deux points avec la lunette, le point M d'abord ; on note les divisions du limbe répondant dans chaque cas à l'extrémité de l'alidade ; on doit noter aussi, si l'on observe un astre mobile, l'heure de l'observation.

9. Mesure d'une distance zénithale — Comme on ne peut pas pointer directement sur le zénith, point idéal, on opère ainsi : 1° on dirige la lunette OL sur l'objet et on lit la division à laquelle aboutit l'alidade sur le cercle vertical ; 2° on fait tourner le cercle vertical de 180° autour de l'axe OC. La lunette prend une position OL' symétrique de OL par rapport à OZ ; 3° on ramène la lunette vers l'objet : la lunette décrit l'angle LOL' double de la distance zénithale cherchée ; la différence des lectures u' - u de l'alidade dans les deux positions, donne le double de la distance zénithale.



On doit noter l'heure de l'observation si l'objet est mobile.

10. Plan méridien. Méridien. Méridienne. Points cardinaux.

Le plan méridien en un lieu donné est le plan déterminé par la verticale du lieu et par l'axe du monde.

Le plan méridien coupe la sphère céleste suivant un grand cercle appelé méridien.

La trace du plan méridien sur le plan horizontal est la méridienne ; elle perce la sphère céleste en deux points opposés N et S, le Nord et le Sud, le Nord du côté du pôle boréal. L'Est et l'Ouest sont les points de rencontre avec la sphère céleste, d'une horizontale passant par O et perpendiculaire à la méridienne.

Les quatre points N, S, E, W constituent les points cardinaux. Quand on regarde le Nord, on a derrière soi le Sud, l'Est à droite, l'Ouest à gauche.

11. Détermination du plan méridien en un lieu donné avec le théodolite. Méthode des hauteurs correspondantes.

Pour fixer les idées, supposons l'observateur tourné vers le Sud et suivant le mouvement d'une étoile qui décrit son parallèle. L'étoile s'est levée à l'Est ; elle monte ensuite dans le Ciel, atteint sa plus grande hauteur au moment de son passage au Méridien (c'est le moment de la Culmination) ; puis elle redescend en prenant les positions symétriques de celles qu'elle avait avant son passage au méridien.

Donc les positions E et E' de l'étoile étant supposées symétriques par rapport au méridien, à une distance zénithale Z O E, avant le passage du méridien, correspondra après le passage au méridien, une distance zénithale égale Z O E' si l'on a visé l'étoile E avec la lunette du théodolite et si, ayant fixé la lunette au limbe vertical, on fait tourner l'ensemble autour de l'axe vertical on devra retrouver l'image de l'étoile dans la lunette quand l'étoile sera dans la position E' symétrique de la position E par rapport au méridien.

Le plan méridien sera le plan bissecteur des deux verticaux Z O E, Z O E'.

Il faut donc : 1° Viser une étoile à l'Est avant le passage au méridien fixer la lunette au limbe vertical et lire l'extrémité de l'alidade horizontale ; 2° faire une seconde visée pour la position symétrique de l'étoile à l'Ouest, la lunette étant restée toujours fixée au limbe vertical, et lire l'extrémité de l'alidade horizontale ; 3° prendre la moyenne des deux lectures. Pour la position correspondante de l'alidade, la lunette en tournant décrira le plan méridien du lieu.

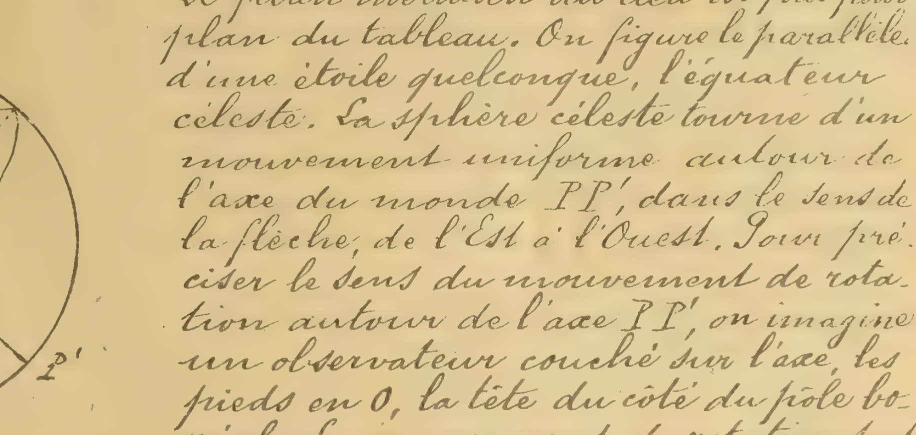
Détermination de la méridienne

On pourra établir un jalon éloigné pour fixer la direction de la méridienne.

Déclinaison magnétique

12_ Remarque – On peut avoir une direction approchée de la méridienne au moyen de la boussole en tenant compte de l'écart de l'aiguille aimantée avec la méridienne ou déclinaison magnétique, donnée par l'Annuaire du Bureau des Longitudes. Cet écart variable avec le temps, est actuellement à Paris d'environ 16° vers l'Ouest.

13_ Mouvement de la sphère céleste _ Sens direct _ Sens rétrograde.



Le plan méridien du lieu est pris pour plan du tableau. On figure le parallèle d'une étoile quelconque, l'équateur céleste. La sphère céleste tourne d'un mouvement uniforme autour de l'axe du monde PP', dans le sens de la flèche, de l'Est à l'Ouest. Pour préciser le sens du mouvement de rotation autour de l'axe PP', on imagine un observateur couché sur l'axe, les pieds en O, la tête du côté du pôle boréal. Le mouvement de rotation peut s'effectuer de la gauche vers la droite de l'observateur ou inversement.

Sens direct

Sens rétrograde

Le sens de rotation contraire à celui des aiguilles d'une montre (en supposant les aiguilles mobiles dans le plan de l'équateur céleste et tournées vers l'observateur) est appelé direct, tandis, que le sens de rotation des mêmes aiguilles est dit rétrograde ; d'où cette conséquence :

Le sens du mouvement de la sphère céleste ou du mouvement diurne est rétrograde.

14. Angle horaire. Mesure du temps au moyen de l'angle horaire d'un astre. Pendule sidérale.

On appelle angle horaire AH d'un astre l'angle du cercle de déclinaison de cet astre avec le méridien du lieu, compté de 0°, quand l'astre est dans le méridien, à 360°, dans le sens du mouvement diurne.

Si l'on a obtenu l'expression théorique de l'angle horaire AH d'un astre Soleil ou étoile, en fonction du temps t, de sorte qu'on ait

$$AH = f(t)$$

on pourra tirer de cette relation la valeur du temps t qui correspond à une certaine valeur mesurée de AH. Pour les étoiles l'angle horaire AH varie proportionnellement au temps t.

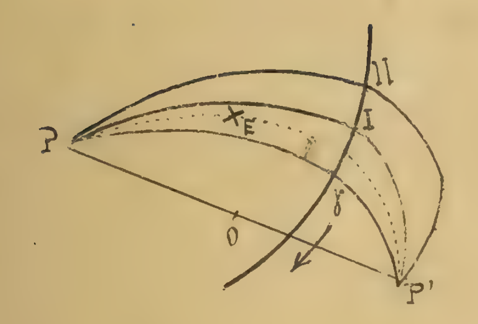
La considération de l'angle horaire d'une étoile conduit à la notion du temps sidéral; la considération de l'angle horaire du Soleil conduit à la notion du temps solaire.

Si l'on imagine une pendule réglée sur le mouvement des étoiles c'est-à-dire marquant 0^h quand une étoile repère, désignée pour le moment par γ, passe périodiquement au même méridien après des intervalles de 24^h, on aura une pendule dite sidérale. Une aiguille infiniment longue dirigée constamment vers γ supposé dans le plan de l'équateur et tournant avec γ représenterait l'aiguille d'une pendule sidérale.

L'heure de cette pendule ou l'heure sidérale n'est autre chose que l'angle horaire du point γ évalué en temps, à raison de 1^h pour 15°. Le jour sidéral est l'intervalle de deux passages successifs au même méridien.

15. Système de coordonnées uranographiques. Ascension droite. Déclinaison et Distance polaire.

Marquons sur l'équateur céleste les points qui passent successivement au méridien à 0^h (point γ) à I^h, à II^h, ... on voit que les heures croîtront dans le sens contraire à celui de la flèche, qui indique le sens du mouvement diurne.



Pour l'observateur couché suivant l'axe PP', les pieds en O, la tête du côté de P, les heures croissent dans le sens direct. Les cercles de déclinaison répondant aux heures 0^h, I^h, II^h... font entre eux des angles de 15°.

Cela posé, le système de coordonnées uranographiques comprend pour un astre quelconque E.

1° la distance polaire PE ou la déclinaison ;

2° l'ascension droite c'est-à-dire l'angle du cercle de déclinaison de E avec le cercle de déclinaison de γ, cet angle étant compté dans le sens direct de 0° à 360°.

On peut dire aussi que l'ascension droite de E est l'heure de 0^h à 24^h, indiquée par la Pendule sidérale quand l'astre passe au méridien.

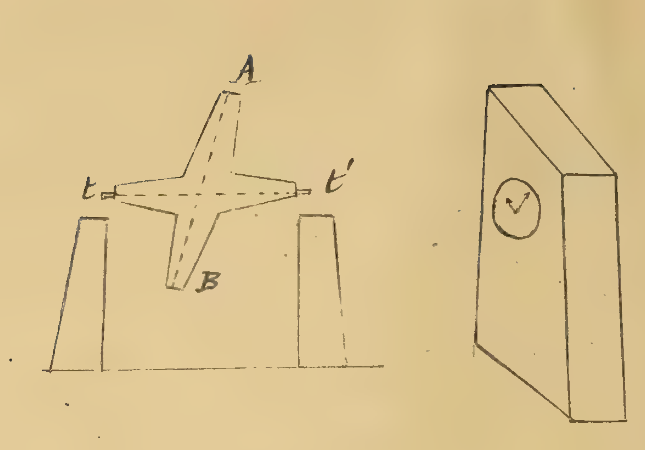
Ordinairement l'ascension droite est mesurée avec la pendule sidérale. Il est facile de passer de l'évaluation en temps à l'évaluation en angle. Une différence de 1^h en temps correspond à une variation d'angle de 15°.

Relation fondamentale. Sur la figure on voit que l'heure sidérale ou l'angle horaire du point γ est la somme de l'ascension droite et de l'angle horaire pour une étoile quelconque. En désignant l'angle horaire d'un astre par AH, l'ascension droite par Æ, l'heure sidérale par H_*, on a donc

$$H_* = \text{Æ} + AH$$

16 - **Lunette méridienne ou instrument des passages.**
C'est une lunette d'assez grande dimension (2 à 3 mètres dans les observatoires) mobile autour d'un axe horizontal tt' perpendiculaire au plan méridien ; l'axe AB de la lunette est perpendiculaire à l'axe de rotation et décrit par suite le plan méridien quand la lunette tourne.

A coté de la lunette méridienne, doit toujours se trouver une pendule sidérale.



On observe l'heure du passage de l'astre au fil vertical du réticule. Si l'instrument est bien réglé et l'axe optique dans le méridien, on aura

$$\mathcal{R} = H_*$$

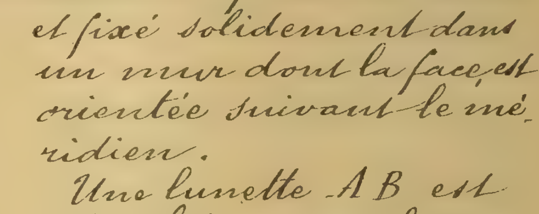
Le même résultat se tire de la formule générale

$$H_* = \mathcal{R} + \mathcal{H}$$

et de $\mathcal{H} = 0$, l'observation étant faite dans le méridien.

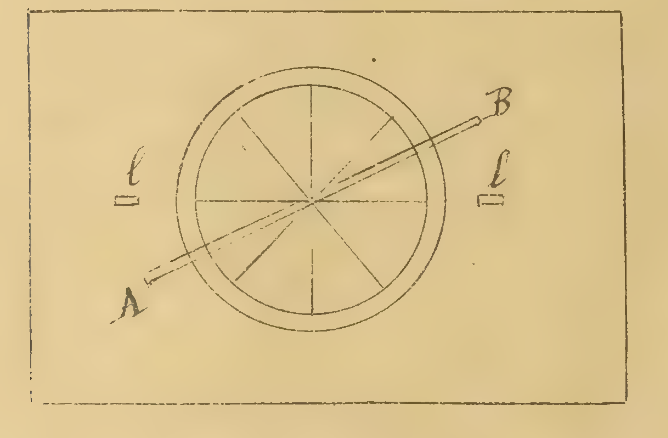
17 - Cercle mural - Observation des distances zénithales méridiennes.

Le cercle mural est un cercle de grande dimension mobile autour d'un axe perpendiculaire au plan méridien



et fixé solidement dans un mur dont la face est orientée suivant le méridien.

Cercle mural



Une lunette AB est attachée au cercle qui porte des divisions. On peut reconnaître les divisions à l'aide de lunettes l, l.

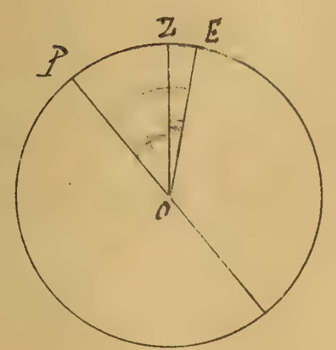
Il suffit d'amener le fil horizontal du réticule à bissecter l'astre au moment de son passage au méridien.

On fait ensuite la lecture des divisions du cercle avec les lunettes l, l.

D'autre part, on dispose sous la lunette rendue verticale, l'objectif en bas, un bain de mercure et on observe le Nadir, en faisant coïncider l'image du réticule obtenue par réflexion sur le bain de mercure avec le réticule lui-même. La lecture des divisions du cercle, augmentée de 180° fait connaître la lecture quand la lunette pointe le zénith, d'où résulte

par la différence des deux lectures la distance zénithale de l'astre.

18 – Détermination des distances polaires – Colatitude –



Pour passer de la distance zénithale ZOE à la distance polaire POE, on a

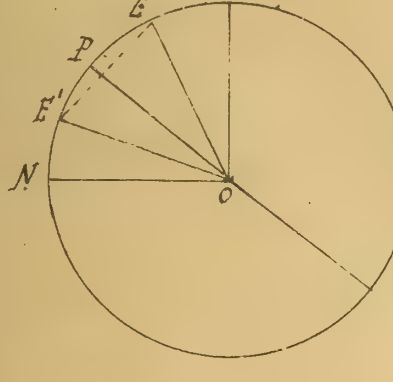
$$POE = POZ + ZOE\ ;$$

c'est-à-dire qu'il faut ajouter à la distance zénithale de l'astre la distance zénithale du pôle.

Cette distance zénithale du pôle s'appelle aussi la Colatitude du lieu; elle se compte à partir du pôle boréal de 0° à 180°.

La latitude est la distance du zénith à l'équateur, comptée positivement dans l'hémisphère boréal, négativement dans l'hémisphère austral.

19 – Détermination de la colatitude d'un lieu par les circompolaires – Elle peut se déterminer au moyen du cercle mural (ou de la lunette du théodolite placée préalablement dans le plan méridien) en observant une étoile voisine du pôle, ou circompolaire, à ses deux passages au méridien, au dessus et au dessous du pôle. On prend le plan méridien pour le plan du tableau. On a pour les deux passages :



$$E \text{ supérieur } ZOE = ZOP - POE$$

$$E' \text{ inférieur } ZOE' = ZOP + POE'$$

La colatitude ZOP est donnée par la moyenne des deux distances zénithales, on la désigne par λ.

A Paris la colatitude est à peu près 41° 10'

NOP serait la hauteur du pôle au dessus de l'horizon. 48° 50' 11''

Remarque – L'étoile polaire, ou α de la Petite Ourse, est une étoile distante de 1° environ du pôle. Il suffit d'en observer la position pour obtenir une valeur approchée de la colatitude du lieu et aussi la position approchée du méridien.

20. Coordonnées locales des astres. Equatorial. Ce système comprend la distance polaire $PE = \delta$ de l'astre E et son angle horaire $ZPE = \mathcal{H}$.

L'instrument qui répond à ce système de coordonnées est l'équatorial qui ne diffère pas dans son principe d'un grand théodolite dont l'axe principal serait dirigé suivant l'axe du monde.

L'avantage de l'équatorial est de pouvoir être dirigé à tout moment vers un point quelconque du ciel, tandis que les instruments méridiens sont impuissants en dehors du méridien.

Pour faciliter l'examen des astres, on adapte souvent aux équatoriaux un mouvement d'horlogerie grâce auquel la lunette suit le mouvement diurne; l'astre étudié reste alors constamment dans le champ de la lunette.

Dans ces dernières années, on a construit de très grands équatoriaux. La lunette de l'équatorial du mont Hamilton en Californie, a près de 20 mètres de longueur et 0m90 d'ouverture. Une autre lunette plus puissante (1m d'ouverture) se trouve maintenant près de Chicago; (observatoire Yerkes).

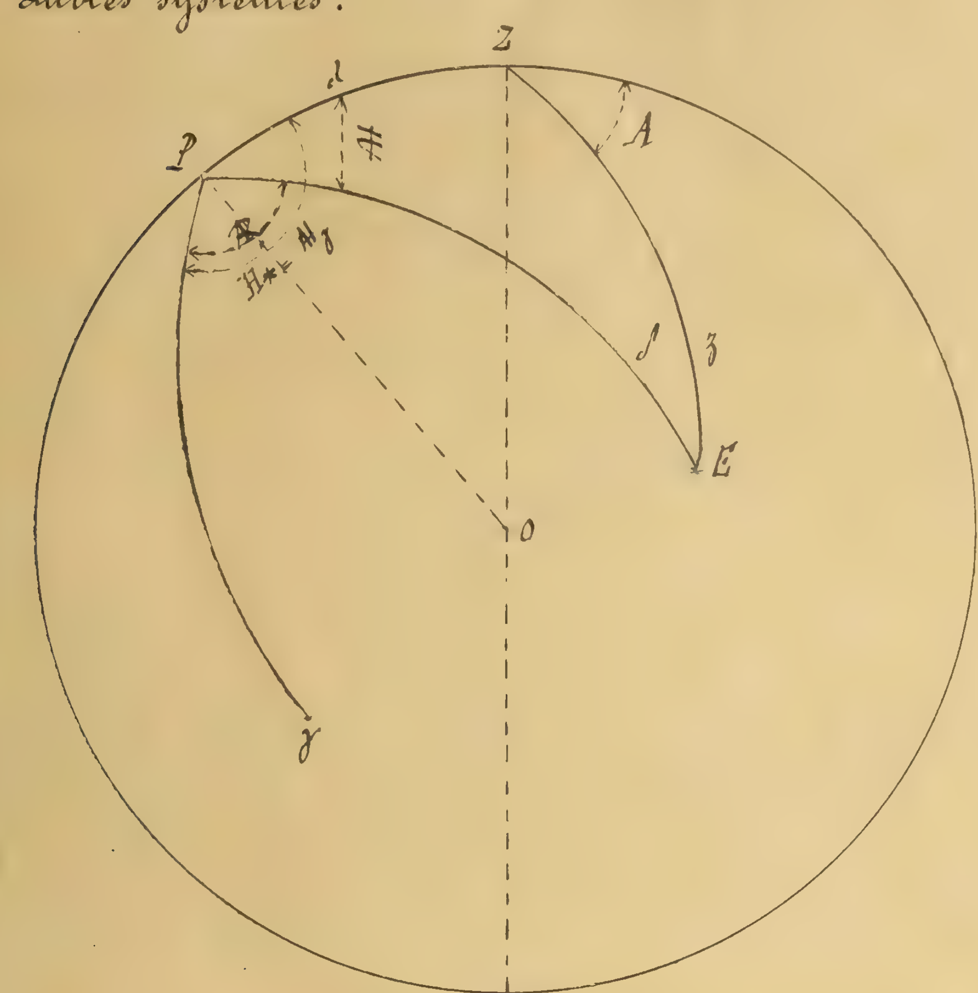
La lunette du théodolite, pourrait aussi être dirigée vers un point quelconque du ciel, mais si l'on compare l'équatorial au théodolite on voit que pour celui-ci les deux coordonnées Z et A d'un astre sont variables, tandis que pour l'équatorial la distance polaire δ est constante et $\mathcal{H}$ résulte aussitôt de la relation

$$H_{\star} = \mathcal{R} + \mathcal{H}$$

Pour diriger l'équatorial, à l'heure $H_{\star}$ de la pendule sidérale sur un astre dont les coordonnées uranographiques sont δ et $\mathcal{R}$, il suffit que l'angle POL étant pris égal à δ on fasse tourner l'instrument autour de l'axe PP' de manière que l'angle horaire indiqué sur le cercle horaire $P'A$ soit égal à

$$\mathcal{H} = H_{\star} - \mathcal{R}$$

21. Résumé des différents systèmes de coordonnées. Relations entre le système de coordonnées zénithales et les deux autres systèmes.



Coordonnées zénithales : Distance zénithale ZE = z ; azimut A compté à partir du méridien du Sud vers l'Ouest.

Coordonnées uranographiques : Distance polaire PE = δ ; ascension droite Ꜹ = γPE comptée à partir de γ dans le sens direct de 0° à 360° ou de 0ʰ à 24ʰ.

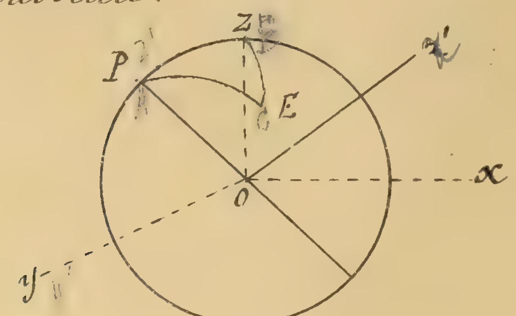
Coordonnées locales : Distance polaire PE = δ ; angle horaire AH = ZPE compté à partir du méridien, dans le sens rétrograde ou du mouvement diurne de 0° à 360° ou de 0ʰ à 24ʰ.

L'heure sidérale H_* est l'angle horaire du point γ.

$$H_* = Ꜹ + AH$$

Le triangle ZPE (zénith, pôle, étoile) s'appelle souvent le triangle de position. On a souvent à le considérer.

Pour obtenir les relations entre les systèmes de coordonnées, reprenons la sphère céleste, le plan méridien étant le plan du tableau.



Les coordonnées zénithales d'une étoile E étant

$$Z, A$$

et les coordonnées locales

$$\delta, AH$$

la colatitude POZ du lieu $= \lambda$

Les coordonnées rectangulaires de E par rapport aux axes Ox, Oy, Oz (Oy vers l'Ouest) sont

$$x = R \sin Z \cos A,$$
$$y = R \sin Z \sin A,$$
$$z = R \cos Z$$

Les coordonnées de E par rapport au système d'axes Ox', Oy', OP ou Oz' qui est le système primitif ayant tourné d'un angle λ autour de Oy, sont

$$x' = R \sin \delta \cos AH$$
$$y' = R \sin \delta \sin AH$$
$$z' = R \cos \delta$$

Or on a

$$y = y',$$
$$x = x' \cos \lambda - z' \sin \lambda,$$
$$z = x' \sin \lambda + z' \cos \lambda,$$

d'où, en supprimant le facteur R,

$$\sin Z \cos A = -\sin \lambda \cos \delta + \cos \lambda \sin \delta \cos AH$$
$$\sin Z \sin A = \sin \delta \sin AH$$
$$\cos Z = \cos \delta \cos \lambda + \sin \delta \sin \lambda \cos AH$$

Ces formules donnent les relations cherchées pour ce qui concerne les coordonnées zénithales et locales.

Pour avoir les relations entre les coordonnées zénithales et uranographiques, il suffit de remarquer que

$$H_{*} = \mathcal{R} + AH$$

et de remplacer dans les formules précédentes AH par

$$AH = H_{\star} - AR$$

22. Rappel des formules de la trigonométrie sphérique — Triangles quelconques. On ne considérera que des triangles sphériques dont les côtés a, b, c et les angles opposés A, B, C sont moindres que $180°$. Les formules dites fondamentales, qui se déduisent des précédentes en remplaçant A par $180° - B$, l'angle du zénith du triangle de position, s'écrivent

$\zeta = a$, $\delta = b$, $\lambda = c$; $AH = A$, $A = 180° - B$, C

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A, \text{ (analogie des sinus)}$$

$$\sin a \cos B = \sin c \cos b - \sin b \cos c \cos A.$$

Il est très important de pouvoir lire immédiatement les relations fondamentales sur un triangle quelconque.

Il suffit pour cela de se rappeler :

1° l'expression symétrique du cosinus d'un côté en fonction des côtés adjacents et de l'angle qu'ils comprennent :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

2° les analogies des sinus

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C};$$

formules semblables à celles de la trigonométrie plane, sauf que à la place des côtés on doit mettre les sinus de ces côtés.

3° la formule de trigonométrie plane

$$c = b \cos A + a \cos B \text{ d'où } a \cos B = c - b \cos A,$$

donnant la projection d'un côté sur l'autre. Pour avoir la formule correspondante de trigonométrie sphérique, il suffit de remplacer dans

$$a \cos B = c - b \cos A$$

les côtés a, b, c par les sinus et de multiplier chaque terme du second membre par le cosinus du côté qui ne figure pas dans ce terme ce qui donne

$$\sin a \cos B = \sin c . \cos b - \sin b . \cos c . \cos A$$

Faisons application de ces règles au triangle de position pôle, zénith, étoile de la figure (p. 13). Si l'on veut avoir les coordonnées z et A en fonction de δ et AH, on écrira

$$z \cos(180^\circ - A) = \lambda - \delta \cos AH$$

$$\sin z \cos(180^\circ - A) = \sin \lambda \cos \delta - \sin \delta \cos \lambda \cos AH$$

ou

$$\sin z \cos A = -\sin \lambda \cos \delta + \sin \delta \cos \lambda \cos AH$$

23 - Formules calculables par logarithmes.

On tire de la 1ière des formules fondamentales la valeur de $\cos A$, et on calcule

$$1 + \cos A = 2\cos^2 \frac{A}{2}, \quad 1 - \cos A = 2\sin^2 \frac{A}{2} \text{ et } \tang^2 \frac{A}{2}$$

En posant

$$a + b + c = 2s,$$

il vient

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}, \quad \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}, \quad tg^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}$$

Remarque - Il y a avantage à calculer les angles par la formule de la tangente parce que les différences logarithmiques des tables étant plus grandes pour les tangentes que pour les sinus et cosinus, les angles sont obtenus avec une plus grande précision.

Remarque - Dans les formules précédentes,

$$\sin s, \ \sin(s-a), \ \sin(s-b), \ \sin(s-c)$$

sont positifs.

24 - Analogies de Néper.

On part de

$$\frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}} = \frac{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2}} = \frac{tg \frac{A}{2} - tg \frac{B}{2}}{tg \frac{A}{2} + tg \frac{B}{2}}$$

et de

$$\frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}} = \frac{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} = \frac{1 + tg \frac{A}{2}\, tg \frac{B}{2}}{1 - tg \frac{A}{2}\, tg \frac{B}{2}}$$

on remplace les tang $\frac{1}{2}$ par leurs valeurs et on réduit
Calcul pour la première formule

$$\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}} - \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-b)}}}{\sqrt{} + \sqrt{}}$$

$$= \frac{\sin(s-b) - \sin(s-a)}{\sin(s-b)+\sin(s-a)} = \frac{2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{c}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a-b}{2}}$$

$$\boxed{\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}} = tg\,\frac{a-b}{2}\,cotg\,\frac{c}{2}}$$

on trouve de même

$$\boxed{\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}} = tg\,\frac{a+b}{2}\,cotg\,\frac{c}{2}}$$

Ces deux formules feront connaître les côtés a, b si l'on a donné c et les deux angles adjacents AB. La considération du triangle supplémentaire donnerait deux autres formules permettant de résoudre un triangle connaissant deux côtés et l'angle compris.
Les quatre formules sont celles de Néper, elles s'emploient pour la résolution des triangles quand on donne trois éléments consécutifs angles ou côtés.

25 – Résolution des triangles sphériques.

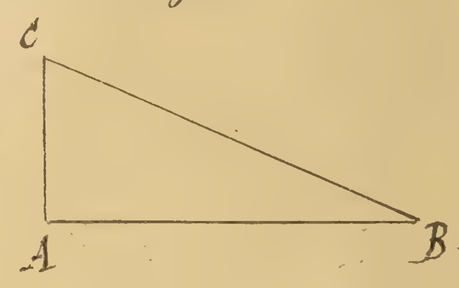
Il y a 6 cas possibles; on peut donner

les 3 côtés	. . . .	I
2 côtés et un angle	angle compris . . .	II
	angle opposé à l'un des côtés . .	III
1 côté et deux angles	angles adjacents . . .	IV
	un angle opposé au côté . .	V
les trois angles	. . . . .	VI

I et VI se résolvent par les formules $tg\,\frac{A}{2}$ . . . et les formules pour le triangle supplémentaire.
II et IV par les analogies de Néper puisqu'on donne 3 éléments consécutifs. On peut aussi employer les formules fondamentales.
III et V appelés cas douteux, se résolvent par l'analogie des sinus et les analogies de Néper.

Dans la pratique, il n'y a généralement pas de doute sur la solution à choisir.

26_ Triangles rectangles_ Les formules ci-dessus embrassent évidemment les relations convenant aux triangles sphériques rectangles. Il est cependant utile de pouvoir sur un triangle rectangle donné retrouver les formules principales au moyen de la trigonométrie rectiligne.



Dans le triangle rectiligne ABC, rectangle en A, on a

$$\sin B = \frac{b}{a}, \quad \cos B = \frac{c}{a} \quad \operatorname{tg} B = \frac{b}{c}.$$

Pour avoir les formules relatives à un triangle sphérique rectangle en A, on remplace les côtés a, b, c par les sinus ou les tangentes des côtés,

Dans le cas du sinus de l'angle par les sinus des côtés;

Dans le cas du cosinus de l'angle par les tangentes des côtés;

Dans le cas de la tangente de l'angle par la tangente au numérateur et le sinus au dénominateur.

Ainsi on écrira

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}, \quad \cos B = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \cos a = \cos b \cos c \\ \cos B = \cos b \sin C \end{array} \right.$

27_ Usage des formules de la trigonométrie.

Dans les formules de la trigonométrie sphérique a, b, c représentent des angles ou encore des arcs en prenant le rayon comme unité, c'est-à-dire les rapports des longueurs des arcs au rayon de la sphère.

Dans les développements des fonctions trigonométriques en séries tels que

$$\sin a = a - \frac{a^3}{1.2.3} + \dots$$

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^4}{1.2.3.4}$$

(57°30′ 3438′

19

a désigne toujours l'arc rapporté au rayon. Si dans ces formules et dans celles de trigonométrie sphérique, on veut mettre en évidence le rayon de la sphère, il faudra écrire à la place de a, $\frac{s}{R}$ s désignant la longueur de l'arc.

Si dans les formules de trigonométrie l'angle est évalué en degrés, ou en minutes, ou en secondes, il faudra, pour avoir l'arc correspondant rapporté au rayon, diviser par le nombre de degrés, ou le nombre de minutes, ou le nombre de secondes, contenus dans l'arc égal au rayon, soit en chiffres ronds

$$57°,30, \qquad 3438', \qquad 206265''$$

Les angles comme Æ, AH peuvent être donnés en temps, c'est-à-dire en heures, ou en minutes de temps, ou en secondes de temps: dans ce cas, pour avoir l'arc correspondant rapporté au rayon, il faudra diviser par les nombres

$$\frac{57,30}{15}, \qquad \frac{3438}{15}, \qquad \frac{206265}{15}.$$

28. Exercices. Quelle est la différence entre l'arc de 12° et la corde dans une circonférence de rayon égal à 1 mètre?

La différence est, R désignant le rayon et a l'arc moitié (rapporté au rayon).

$$2Ra - 2R\sin a = 2R(a - \sin a)$$

$$= 2R\left(\frac{a^3}{1.2.3} - \frac{a^5}{1.2.3.4.5}\cdots\right)$$

$$2a = \frac{12°}{57°,30} \qquad a = \frac{1}{10} \text{ à peu près}$$

la différence est à peu près

$$2R\frac{a^3}{1.2.3} = \frac{1}{3}\,\frac{R}{10^3} = \frac{1}{3} \text{ de millimètre}$$

Déduire de la formule de trigonométrie sphérique.

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

la formule correspondante de trigonométrie plane en faisant croître à l'infini le rayon de la sphère

Soient α, β, γ les longueurs des côtés du triangle sphérique.

On remplace a par $\frac{\alpha}{R}$ .... et on se sert des développements en séries.

$$\cos\frac{\alpha}{R} = 1 - \frac{\alpha^2}{2R^2} + \cdots$$

$$\sin\frac{\alpha}{R} = \frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha^3}{6R^3} + \cdots$$

il vient

$$1 - \frac{\alpha^2}{2R^2} + \cdots = \left(1 - \frac{\beta^2}{2R^2} + \cdots\right)\left(1 - \frac{\gamma^2}{2R^2} + \cdots\right)$$

$$+ \left(\frac{\beta}{R} - \frac{\beta^3}{6R^3} + \cdots\right)\left(\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma^3}{6R^3} + \cdots\right)\cos A.$$

Quand R tend vers l'infini, $\frac{\alpha}{R}$, $\frac{\beta}{R}$, $\frac{\gamma}{R}$ sont des infiniment petits.

On pourrait être tenté de négliger $\frac{\alpha^2}{2R^2}$ devant 1 ; on trouverait $1=1$. Il faut tenir compte des termes suivants et réduire

$$0 = \frac{\alpha^2}{2R^2} - \frac{\beta^2}{2R^2} - \frac{\gamma^2}{2R^2} + \frac{\beta\gamma}{R^2}\cos A + \text{termes du } 3^e \text{ degré au moins}$$

$$\text{en } \frac{\alpha}{R}, \frac{\beta}{R}, \frac{\gamma}{R}.$$

En multipliant par $2R^2$ et passant à la limite

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos A.$$

29 – Développement en série donné par Lagrange (Oeuvres, t. IV) pour l'arc x tel que

$$\operatorname{tang} x = \frac{1-m}{1+m}\operatorname{tang} y,$$

m étant une petite fraction

Si $m=0$, on a $x=y$; c'est le premier terme du développement

La méthode employée par Lagrange utilise les exponentielles imaginaires ; on a

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i\sin x, \quad i = \sqrt{-1}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\operatorname{tang} x = \frac{1}{i}\,\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2ix} - 1}{e^{2ix} + 1}$$

Remplaçant tg x par cette valeur dans la relation donnée on peut donc en tirer e^{2ix} et $2ix$ en prenant les logarithmes

$$\frac{e^{2ix}-1}{e^{2ix}+1} = i\,\frac{1-m}{1+m}\,tg\,y$$

$$e^{2ix}\left(1-i\,\frac{1-m}{1+m}\,tg\,y\right) = 1+i\,\frac{1-m}{1+m}\,tg\,y$$

$$e^{2ix} = \frac{(1+m)\cos y + i(1-m)\sin y}{(1+m)\cos y - i(1-m)\sin y}$$

$$e^{2ix} = \frac{e^{iy}+m\,e^{-iy}}{e^{-iy}+m\,e^{iy}}$$

On prend les logarithmes

$$2ix = \mathcal{L}(e^{iy}+me^{-iy}) - \mathcal{L}(e^{-iy}+m\,e^{+iy})$$

Pour développer, on a recours à la formule

$$\mathcal{L}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots$$

en observant qu'elle suppose. module $z < 1$.

On écrira donc

$$\mathcal{L}(e^{iy}+m\,e^{-iy}) = \mathcal{L}e^{iy}(1+me^{-2iy}) = iy + \mathcal{L}(1+m\,e^{-2iy}),$$

$$\mathcal{L}(e^{-iy}+m\,e^{iy}) = \mathcal{L}e^{-iy}(1+m\,e^{2iy}) = -iy + \mathcal{L}(1+m\,e^{2iy}),$$

d'où

$$2ix = 2iy + me^{-2iy} - \frac{m^2}{2}e^{-4iy} + \frac{m^3}{3}e^{-6iy} - \ldots$$
$$- m\,e^{2iy} + \frac{m^2}{2}e^{4iy} - \frac{m^3}{3}e^{6iy} + \ldots$$

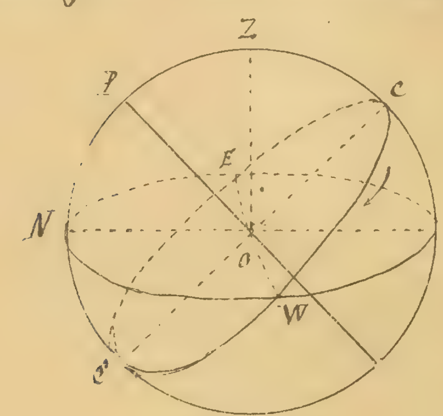
$$x = y - m\sin 2y + \frac{m^2}{2}\sin 4y - \frac{m^3}{3}\sin 6y + \ldots$$

Il ne faut pas oublier que dans cette formule x et y désignent les rapports des arcs au rayon.

Différents aspects de la sphère - Constellations. zodiaque.

30. Sphère oblique, sphère parallèle, sphère droite.
Revenons à l'étude de la sphère céleste.

Prenons le plan méridien pour le plan du tableau et voyons les circonstances qui se présentent par rapport au lever et au coucher des astres pour un observateur situé d'abord dans un lieu de colatitude moyenne, Paris par exemple. Considérons d'abord un astre situé dans l'équateur céleste. Il se lève en E à l'Est, sa hauteur augmente jusqu'en e, au moment du passage supérieur au méridien ou de la culmination. L'astre redescend ensuite, sa hauteur repasse par les mêmes valeurs dans l'ordre inverse; l'astre disparait à l'horizon en W à l'Ouest; il continue son mouvement au dessous de l'horizon; en e', a lieu le passage inférieur au méridien. Il y a égalité pour l'astre situé dans l'équateur entre les temps pendant lesquels l'étoile est visible et invisible.

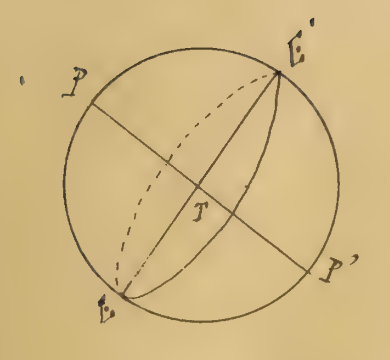


Pour une étoile dont le parallèle est plus près du pôle boréal P, les phénomènes sont analogues; mais l'étoile reste plus longtemps au dessus de l'horizon qu'au dessous.

Pour les étoiles dont la distance polaire est égale ou inférieure à la hauteur du pôle mesurée par l'arc PN, elles sont toujours visibles. on les appelle étoiles circompolaires.

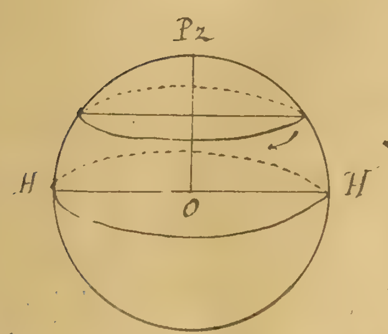
Pour les étoiles situées dans l'hémisphère céleste Austral, les remarques sont inversées.

L'aspect de la sphère céleste dépend essentiellement de l'angle POZ, ou de la colatitude, et varie par suite quand l'observateur se déplace sur la Terre. La verticale PZ passe sensiblement par le centre du globe terrestre. Si donc, l'on prend les deux points du globe où aboutit le diamètre parallèle à l'axe du monde, la verticale se confondra sensiblement avec l'axe du monde.



D'autre part, pour un des points de l'équateur terrestre E E', la verticale sera perpendiculaire à l'axe du monde.

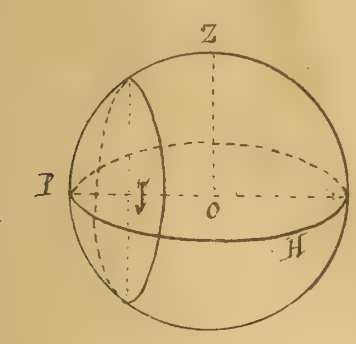
La colatitude est de 0° en P, de 90° à l'équateur, de 180° en P'.



Si la verticale est confondue avec l'axe du monde, on voit les étoiles décrire des cercles parallèles à l'horizon, sans jamais se coucher.

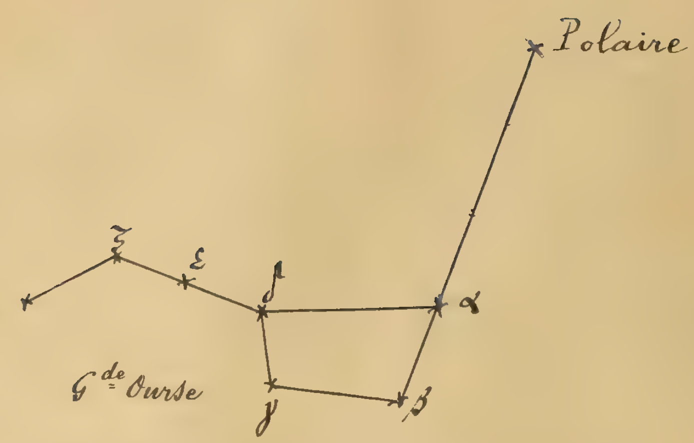
Pour les points de l'équateur, les étoiles décrivent de petits cercles perpendiculaires à l'horizon et partagés en deux parties égales par l'horizon;

une étoile quelconque est pendant des temps égaux au dessus et au dessous de l'horizon.

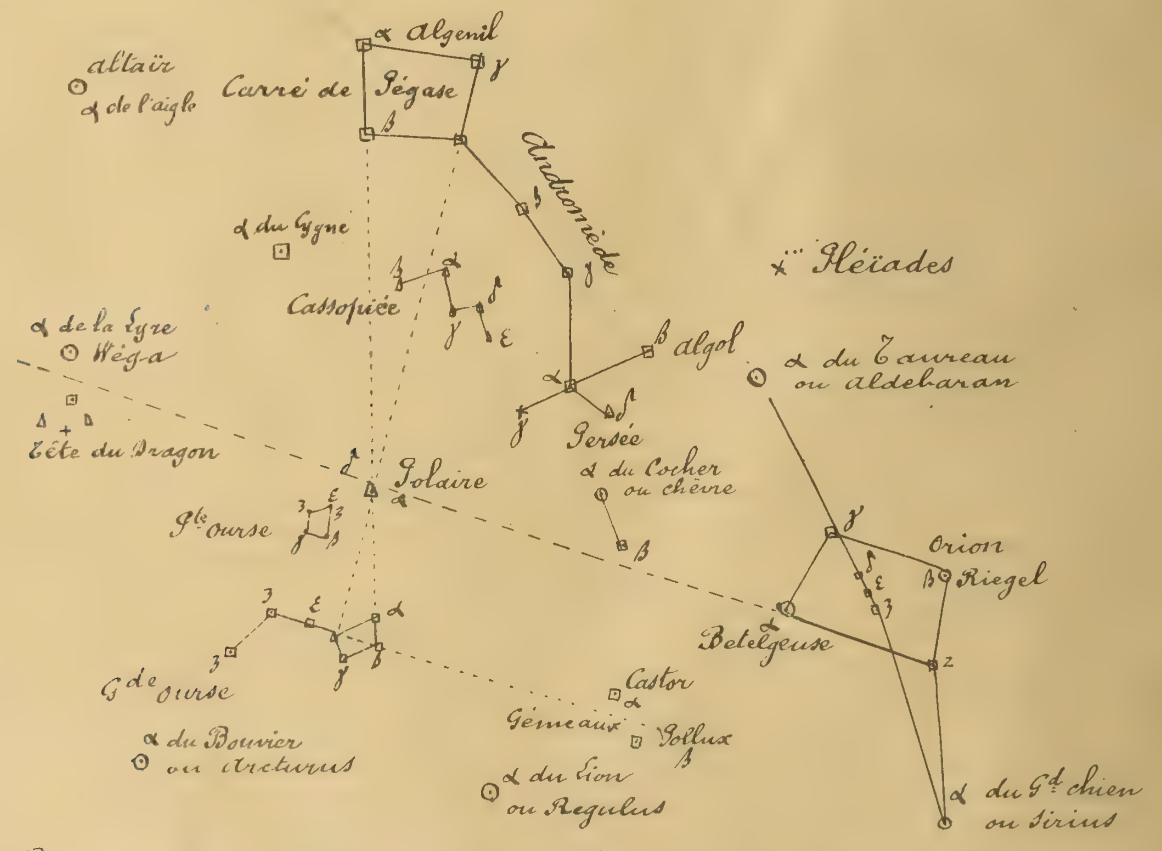


On donne les noms de sphère oblique, sphère parallèle, sphère droite à ces trois aspects de la sphère céleste.

31 - Constellations - Principales étoiles de l'hémisphère N.d
Il y a d'abord à reconnaître l'étoile polaire à peu près fixe dans le ciel près du pôle boréal. On se sert dans ce but de la Constellation de la Grande Ourse facile à distinguer



Il suffit de prolonger α β d'environ quatre fois sa longueur du côté de α pour rencontrer la Polaire. Ensuite, on procède par des alignements comme le montre la figure ci-dessous comprenant les principales étoiles de l'hémisphère nord visibles en France, en Automne, et extraite du Cours d'Astronomie du Commandant Guyou.



Principales étoiles de l'hémisphère Nord visibles en Automne

Grandeurs : ⊙ 1ère, ⊡ 2e, △ 3e, + 4e, ▪ 5e

Coordonnées uranographiques des étoiles principales.

Nom de l'étoile	Ascension droite	Déclinaison
α Taureau (aldébaran)	4^h 30^m	+ 16° 18'
α Cocher (La chèvre)	5 9	+ 45 54
α Orion (Bételgeuse)	5 50	+ 7 23
α Grand chien (Sirius)	6 41	− 16 35
α Petit chien (Procyon)	7 34	+ 5 29
β Gémeaux (Pollux)	7 39	+ 28 16
α Lion (Régulus)	10 3	+ 12 28
α Vierge (L'épi)	13 20	− 10 38
α Bouvier (Arcturus)	14 11	+ 19 43
α Scorpion (antarès)	16 23	− 26 12
α Lyre (Véga)	18 33	+ 38 41
α Aigle (altaïr)	19 46	+ 8 36
α Cygne	20 38	+ 44 55

La connaissance des valeurs des coordonnées permettra de reconnaître les étoiles non marquées sur la figure précédente.

Il faut noter que des observations intéressantes (étoiles nouvelles, variations d'éclat des étoiles) sont faites journellement par des amateurs d'Astronomie avec de simples jumelles ou même à l'œil nu. Un astronome célèbre, Argelander, a montré toute l'utilité de ces observations qui n'exigent que la connaissance des Constellations et l'usage des cartes célestes.

32 - Zodiaque. Comment reconnaître les constellations du zodiaque qui seront visibles à une époque quelconque de l'année?

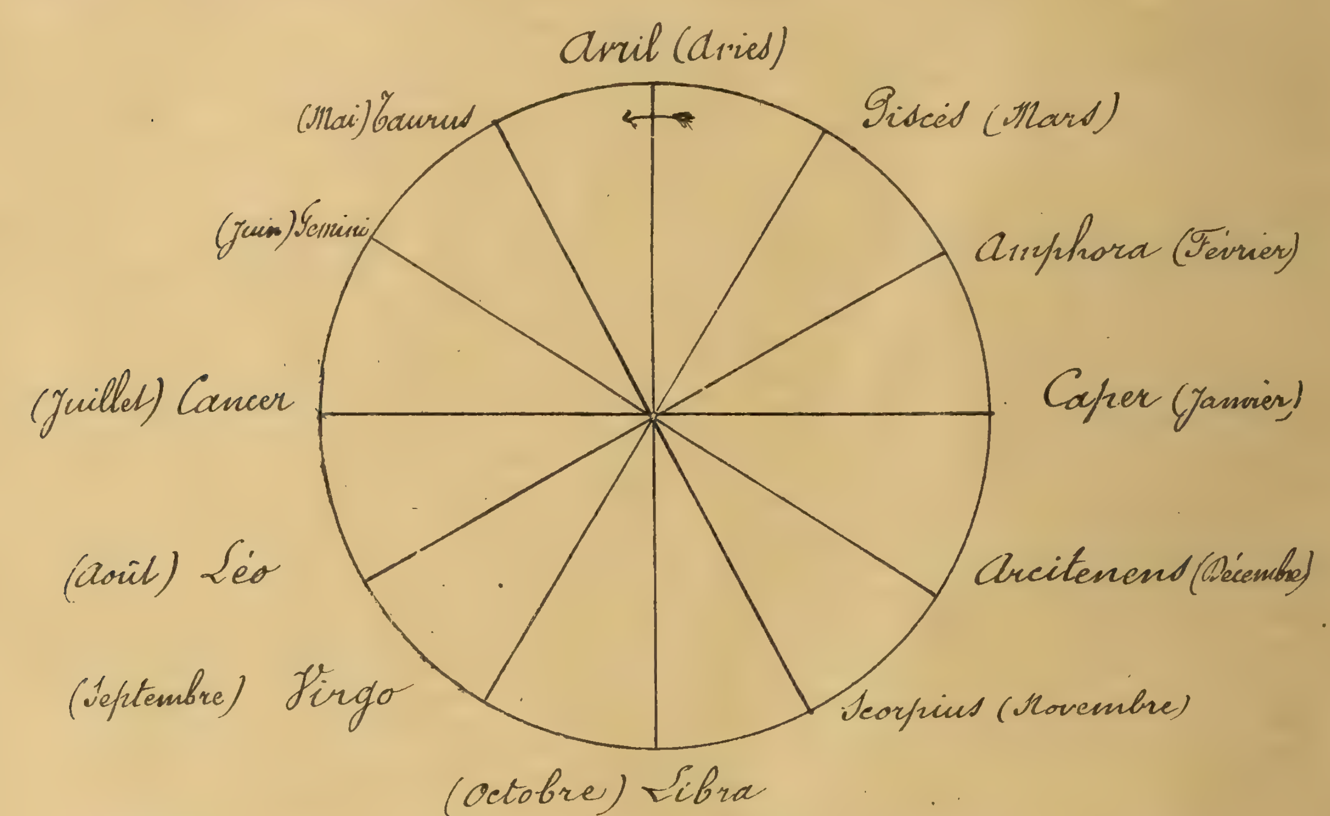
Les Constellations visibles varient dans le Cours de l'année: elles deviennent visibles à cause de l'obscurité de la nuit. Si l'on imagine un astre fictif la Nuit opposé au Soleil et produisant l'obscurité de même que le Soleil produit le jour, les constellations les mieux visibles seront celles où se trouvera la Nuit.

Le Soleil se déplace parmi les étoiles; Comme les Anciens l'ont constaté en comparant la position du Soleil, lors du lever et du coucher, aux étoiles voisines les plus brillantes, il marche constamment dans le sens direct, et dans l'intervalle d'une année il décrit un grand cercle de la sphère céleste appelé écliptique, un peu incliné sur l'équateur céleste. Le Soleil traverse successivement les douze constellations du Zodiaque comprises dans les deux vers.

Sunt Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo.
Libraque, Scorpius, Arcitenens, Caper, Amphora, Pisces.

Chacun des 12 mois correspond à une constellation. A l'équinoxe du printemps, vers le 21 Mars, le Soleil traverse l'équateur céleste, en montant de l'hémisphère austral dans l'hémisphère boréal; il se trouve alors dans la constellation des Poissons (Pisces) et passe ensuite dans Aries, Taurus ....

Ecrivons les Constellations dans l'ordre sur l'équateur céleste avec les mois correspondants.



Cela permet de répondre aussitôt aux deux questions:
Dans quel mois le Soleil est-il dans telle Constellation?
Dans quel mois telle Constellation est-elle vers minuit au milieu du ciel? Il suffit de remarquer que le Soleil doit se trouver dans la Constellation diamétralement opposée.

Exemple: Dans quel mois la Constellation du Taureau et les Pléiades sont elles vers minuit au milieu du Ciel? La figure montre que c'est au mois de Novembre.

33 – Problèmes relatifs au mouvement diurne.

Connaissant la colatitude λ d'une station et les coordonnées uranographiques d'un astre, trouver l'heure sidérale du lever ou du coucher de cet astre. 1

Les données étant les mêmes, trouver l'azimut du point de l'horizon où l'astre se lève ou se couche? 2

" " trouver quelle est la hauteur de l'astre à l'heure H_* ou réciproquement 3

" " trouver H_* par le moyen de la hauteur mesurée?

" " trouver l'heure H_* du passage de l'astre par un vertical d'azimut A? 4
ou reciproquement

Donnés λ, δ, $A\!R$

---

1 $\quad 0 = \cos\lambda\cos\delta + \sin\lambda\sin\delta\cos(H_* - A\!R)$ car $z = 90^\circ$

2 $\quad \sin A = \sin\delta\sin A\!H$ $\quad z = 90^\circ$

$A\!H$ est donné par $\quad 0 = \cos\lambda\cos\delta + \sin\lambda\sin\delta\cos A\!H$

On a $\cos A = -\sin\lambda\cos\delta + \cos\lambda\sin\delta\cos A\!H$

3 $\quad h = 90^\circ - z \quad \sin h = \cos\lambda\cos\delta + \sin\lambda\sin\delta\cos(H_* - A\!R)$

4 $\quad \sin\delta\sin(H_* - A\!R)\cot A = -\sin\lambda\cos\delta + \cos\lambda\sin\delta\cos(H_* - A\!R)$

Chapitre II.

Rôle des instruments et de la théorie. Méthodes de Calcul. Instruments servant à la mesure des angles.

1° Rôle des instruments – Nos connaissances dérivent des observations et aussi de la théorie, qui cherche à relier les faits observés. Il peut arriver que la théorie devance l'observation. (Découverte de Neptune par Le Verrier en 1846); encore faut-il que la théorie soit fondée sur de bonnes observations. Cela montre le rôle essentiel des instruments qui servent à effectuer les observations et en particulier à mesurer les angles et indiquer l'heure des mesures.

Le progrès des instruments a été subordonné aux progrès des arts mécaniques.

On indique ci-dessous le degré de précision sur lequel on pouvait compter à différentes époques (Astronomie de Lalande)

L'incertitude des observations de Ptolémée était au moins de 10' pour les angles et de 15^m pour le temps des phénomènes

L'incertitude des observations de Tycho-Brahé était de 1' à 2'.

Képler ayant trouvé les théories astronomiques de Ptolémée en erreur de 8', d'après les observations de Tycho, pour lesquelles on ne pouvait admettre une telle erreur, partit de là pour réformer toute l'Astronomie.

La précision augmenta beaucoup au XVIIe siècle avec l'emploi de la lunette à réticule et des horloges.

Au XVIIIe siècle Bradley inaugura en Angleterre l'Astronomie de précision.

Aujourd'hui on ne négligerait pas comme insignifiants un dixième de seconde d'angle $0'',1$ ou un centième de seconde de temps $0^s,01$.

2- Rôle de la théorie - Méthodes de Calcul - approximations successives - D'une manière générale, l'observation ou l'expérimentation renseignent sur les faits, indiquent les hypothèses possibles. La théorie cherche à établir des rapports entre ces hypothèses et à découvrir les lois essentielles des phénomènes : ce qui est proprement l'objet de la Science.

En astronomie, la théorie tire un grand secours des Mathématiques qui permettent de transformer les relations entre les quantités mesurées, ce qui facilite les comparaisons. Ainsi les hypothèses ou idées préconçues, point de départ nécessaire de la Science sont développées logiquement et leurs conséquences rapprochées des faits observés :

Les calculs à faire n'ont besoin que d'une précision limitée, comparable à celle des mesures. Il ne servirait à rien de calculer plus de décimales que les observations n'en peuvent faire connaître.

Le degré de précision augmentera sans doute avec le temps. Aujourd'hui on se sert de 7 décimales au plus. C'est le nombre de chiffres des Tables usuelles de logarithmes.

Les tables de logarithmes et les autres tables numériques contiennent les valeurs de la fonction cherchée $f(x)$ pour des valeurs équidistantes de la variable appelée argument des Tables. Pour avoir la valeur de $f(x)$ correspondant à une valeur de l'argument non comprise dans les Tables, on fait une interpolation en se servant des différences inscrites dans les Tables.

Le tableau ci-dessous montre ce qu'on entend par différences premières, secondes . . . .

Argument	fonction $f(x)$	Diff. premières Δ_1	Diff. secondes Δ_2	Diff. troisièmes Δ_3
a	A			
		$B - A$		
$a+1$	B		$C - 2B + A$	
		$C - B$		$D - 3C + 3B - A$
$a+2$	C		$D - 2C + B$	
		$D - C$		$E - 3D + 3C - B$
$a+3$	D		$E - 2D + C$	
$a+4$	E	$E - D$		
. . .	. . .	. . .	. . .	

Il n'y a pas besoin d'explication pour les différences premières B–A, C–B, . . : les différences secondes sont les différences des différences premières, et ainsi de suite ; B–A est la différence première de A ou Δ_1, C–2B+A est la différence seconde de A ou Δ_2

La formule d'interpolation qui donne $f(a+x)$, pour x compris entre 0 et 1, est

$$f(a+x) = f(a) + x\Delta_1 + \frac{x(x-1)}{2}\Delta_2$$

Le trinôme du second membre coïncide avec $f(x)$ pour les trois valeurs $x=0$, $x=1$, $x=2$ de x. Il suffit de remplacer Δ_1 et Δ_2 par leurs valeurs.

Dans la pratique on s'arrange, en diminuant au besoin l'intervalle des arguments, pour avoir besoin au plus des différences secondes. Dans les tables usuelles de logarithmes on s'est arrangé pour n'avoir à employer que les différences premières.

D'ordinaire quand on calcule une série de nombres pour des valeurs équidistantes d'un argument, il est de règle de former les différences successives afin de reconnaître les erreurs et de les corriger ; on remarque qu'une erreur ε commise sur C, par exemple, entraîne les erreurs suivantes dans les différences : $+\varepsilon, -\varepsilon$ pour les Δ_1, $+\varepsilon, -2\varepsilon, +\varepsilon$ pour les Δ_2 . . . . Les Δ_2 sont elles sensiblement constantes, on a le moyen de reconnaître de suite le nombre fautif et de le corriger.

Tandis qu'en général, dans l'Analyse on n'a pas égard à la signification concrète des lettres et à leur valeur numérique, il est essentiel d'en tenir compte dans les applications ; quand certaines quantités sont petites on en profite pour développer en séries. Suivant le degré de précision dont on a besoin, on prendra plus ou moins de termes.

On admet souvent, ce qui est le cas le plus simple et par là même le plus important, que les quantités dont il s'agit sont assez petites pour que leurs puissances et produits soient négligeables ; de sorte qu'on peut les traiter comme des différentielles ; c'est ce qui arrive quand, par exemple, on veut apprécier l'influence de petites erreurs des données sur un résultat.

Une méthode fréquemment employée est celle des approximations successives. En voici un exemple.

Soit à résoudre l'équation dite de Képler

$$u - c \sin u = m \qquad m \text{ et } c \text{ sont donnés}$$

c étant petit
Ecrivons

$$u = m + c \sin u .$$

D'après l'hypothèse c petit, $u = m$ sera une valeur approchée ; soit u_1.
Calculons ensuite

$$u_2 = m + c \sin u_1 ,$$

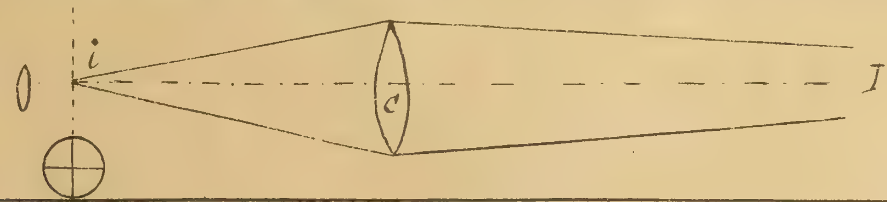
$$u_3 = m + c \sin u_2 ,$$

u_1, u_2, u_3 . . seront les résultats des approximations successives.
On démontre qu'ils tendent vers la racine cherchée u (1), ce que le calcul confirme d'ailleurs
Dans la suite du cours on rencontrera des exemples de la méthode des approximations successives appliquée à l'intégration des équations différentielles.

Instruments de mesure des angles (2)

3. L'alidade à pinnules des anciens déterminait une direction par une croisée de fils et le centre d'une petite ouverture derrière laquelle on plaçait l'œil.

L'inconvénient est que le pointé ne se fait pas nettement: l'œil ne saurait viser à la fois l'objet, la croisée de fils et l'œilleton.
La substitution des lunettes à réticules aux pinnules (au XVIIe siècle) a permis d'atteindre une haute précision



(1) Appell - Traité de Mécanique rationnelle, t. I, p. 391.
(2) Dans ce qui suit, on admet la théorie élémentaire des lentilles sans épaisseur. On ne s'occupe que de ce qui peut intéresser directement les observations.

L'image d'un point très éloigné I se forme dans le plan focal principal de l'objectif, en i ; dans le même plan se trouve le réticule.

L'axe optique de la lunette est défini par la croisée des fils du réticule (fils d'araignée) et le centre optique C de l'objectif.

Quand on vise un objet I, on amène l'image de l'astre en coïncidence avec la croisée des fils ; on est sûr alors que i, c et I sont en ligne droite.

Le réticule assure l'opération de la visée des astres. La loupe à court foyer ou oculaire dont l'œil est armé, augmente la puissance de l'œil pour vérifier la coïncidence.

Mise au point d'une lunette – La mise au point comporte deux opérations : on met l'oculaire au point sur les fils du réticule, de manière qu'ils paraissent très nets ; on déplace ensuite au moyen d'une crémaillère le système formé par l'oculaire et le réticule, de manière qu'on voie en même temps l'image nette d'un objet placé à l'infini, d'une étoile par exemple et les fils du réticule ; alors le réticule se trouve placé dans le plan focal principal. L'opération est d'autant plus précise que le grossissement est plus fort.

La distance d de l'oculaire au plan focal de l'objectif ne reste pas la même pour les différentes vues.

D'après la formule élémentaire des lentilles, où f est

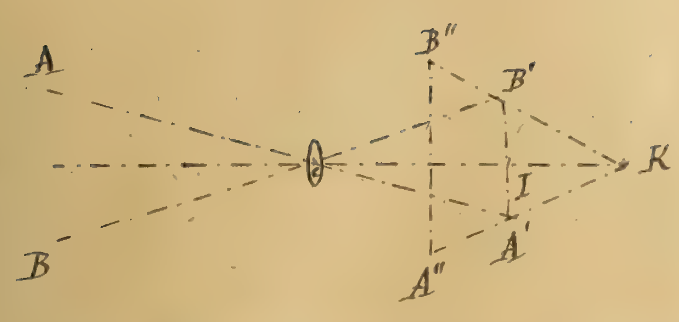
$$\frac{1}{d} - \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{f},$$

la distance focale principale de la lentille oculaire, d varie dans le même sens que Δ distance de vision distincte.

Par exemple, un myope doit enfoncer l'oculaire.

4 – Grossissement d'une lunette – Il est sensiblement égal au rapport du diamètre de l'objectif au diamètre de l'anneau oculaire – Le grossissement est le rapport des angles sous tendus par l'objet vu avec la lunette et à l'œil nu.

On appelle anneau oculaire l'image réelle de l'objectif vu à travers l'oculaire. Par l'anneau oculaire doivent passer tous les rayons ayant traversé l'objectif et l'oculaire.



On peut voir facilement l'anneau oculaire à l'œil nu ou avec une loupe.

Voyons quel est le grossissement de la Lune.

Vue directement, la lune par exemple, sous tend un angle $ACB = A'CB'$.

Si l'on regarde l'image $A'B'$ avec l'œil placé en K, sans oculaire, le grossissement sera sensiblement

$$G = \frac{IA'}{KI} : \frac{IA'}{CI} = \frac{CI}{KI} = \frac{F}{d}$$

| F distance focale de l'objectif
| d distance de l'œil au plan focal

il augmente avec la longueur focale de la lunette et avec le rapprochement de l'œil.

Pour avoir un fort grossissement avec une lunette donnée, il faut rapprocher l'œil, regarder l'image avec un oculaire ou loupe à courte distance focale. Plaçons l'oculaire au point K, d'après la formule $\frac{1}{d} - \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{f}$, il viendra

$$G = \frac{F}{d} = F\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{\Delta}\right) = \frac{F}{f} \quad \text{en négligeant } \frac{f}{\Delta} \text{ devant } 1$$

Soit par exemple $f = 2$ cent, $\Delta = 20$ cent. $\frac{f}{\Delta} = \frac{1}{10}$.

Il n'y a pas d'intérêt à avoir la valeur de grossissement avec une très grande précision.

L'image de l'objectif se produit à une distance x de l'oculaire donnée par

$$\frac{1}{F+d} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f}.$$

Le rapport du rayon R de l'objectif au rayon a de l'anneau oculaire est

$$\frac{R}{a} = \frac{F+d}{x} = (F+d)\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{F+d}\right) = \frac{F+d}{f} - 1$$
$$= \frac{F}{f} \text{ (à peu près)}$$

L'observation de l'anneau oculaire conduit à une méthode pratique pour avoir le grossissement (dynamètre de Ramsden)

Le diamètre de l'anneau oculaire doit être inférieur à celui de la pupille de l'œil (de 5^{mm} en moyenne) sans quoi une partie de la lumière serait perdue ; cela donne une limite inférieure du grossissement : le double de l'ouverture de l'objectif évaluée en centimètres.
Comme limite supérieure, les constructeurs admettent le double de l'ouverture de l'objectif évaluée en millimètres.

5 _ Clarté d'une Lunette _ Visibilité des étoiles dans le jour _

La clarté d'une lunette est le rapport entre la quantité de lumière que l'unité de surface de la rétine reçoit de l'objet lumineux vu à travers la lunette et celle qu'elle recevrait de ce même objet vu à l'œil nu.

R rayon de l'objectif.

p rayon de la pupille

Le rapport entre les quantités totales de lumière reçues dans les deux cas par la rétine est

$$\frac{R^2}{p^2}$$

Il faut maintenant considérer deux cas

1° Objet lumineux à diamètre sensible.

Les quantités de lumière sont réparties sur la rétine ; le rapport des ouvertures angulaires des deux faisceaux est égal au grossissement $\frac{R}{a}$ et des surfaces $\frac{R^2}{a^2}$, de sorte que la clarté a pour expression

$$\text{Clarté} = \frac{R^2}{p^2} : \frac{R^2}{a^2} = \frac{a^2}{p^2}$$

En général $\frac{a^2}{p^2}$ est < 1

Si l'anneau oculaire est plus grand.

$$\frac{a}{p} = K > 1 \,;$$

il n'entre dans l'œil qu'une fraction $\frac{p^2}{a^2}$ de la lumière reçue par l'objectif : le rapport des quantités de lumière reçues par l'intermédiaire de la lunette et par l'œil est

$$\frac{\frac{R^2 p^2}{a^2}}{p^2} = \frac{R^2}{a^2}$$

les quantités de lumière sont réparties sur la rétine comme plus haut

$$\text{Clarté} = \frac{R^2}{a^2} : \frac{R^2}{a^2} = 1$$

Donc pour des objets à diamètre sensible la clarté n'augmente pas avec la lunette.

On peut le constater en regardant avec une lunette la Lune ou les planètes.

2°- pour les objets sans diamètre apparent comme les étoiles, il n'y a pas à répartir sur des surfaces inégales les quantités de lumière reçues. On a

$$\text{Clarté} = \frac{R^2}{p^2} > 1.$$

D'autre part l'image de la région du ciel qui avoisine l'étoile a au plus le même éclat que dans la vue directe. donc l'emploi d'une lunette d'ouverture assez grande facilite la visibilité de l'étoile sur le fond du ciel.

6- Le champ de la lunette est l'ouverture du cône, ayant son sommet au centre optique de l'objectif, dans lequel doit se trouver un point pour être visible.

Il est au maximum égal à l'angle sous lequel du centre optique de l'objectif on voit la lentille jouant le rôle d'oculaire. Comme l'expérience conduit à prendre le rayon d'une lentille au plus égal au quart de la distance focale f, on doit avoir, G désignant le grossissement

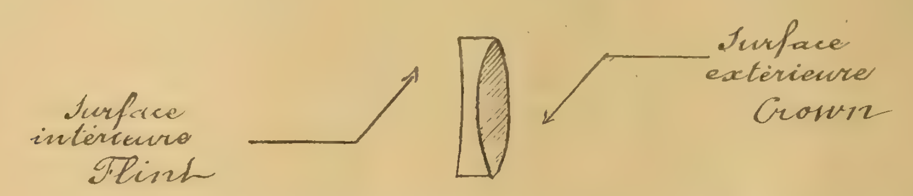
$$\text{tangente (champ)} < \frac{f}{2(F+f)} \text{ ou } \frac{1}{2G} \text{ (à peu près)}$$

La diminution du champ quand G augmente (dans le cas des grandes lunettes) nécessite l'addition de petites lunettes auxiliaires, parallèles à la grande, appelées chercheurs, avec lesquelles on fait une première reconnaissance des objets à examiner.

7- Oculaires- Il y a la loupe simple à court foyer, ensuite des oculaires avec plusieurs lentilles ou oculaires composés. Le plus employé dans les instruments à réticule est l'oculaire positif de Ramsden formé par deux lentilles plan-convexes dont les convexités se regardent

Oeilleton
verre de l'oeil
verre de champ
réticule

8. Invention de la lunette achromatique. Jusqu'au milieu du XVIIIième siècle, on se servait de lentilles simples pour les objectifs. On était obligé pour éviter les effets de dispersion tenant à ce que les divers rayons simples forment leurs foyers en des points différents, d'avoir des lunettes extrêmement longues et même de se passer de tube (Poggendorff. Histoire de la Physique). John Dollond (1758) arriva à obtenir des lentilles achromatiques en formant l'objectif de deux lentilles de verres différents. La figure ci-dessous montre la forme habituellement donnée aux deux lentilles.



On s'arrange ordinairement pour faire coïncider les foyers des rayons D et F du spectre.

Il faut au moins une combinaison de deux lentilles

Si l'on voulait avoir un objectif propre à la photographie (pour les cartes célestes), il faudrait faire coïncider les rayons chimiques.

Il est à remarquer que dès 1695 David Gregory disait: « Il serait peut-être utile de former l'objectif de différents milieux, comme cela a été réalisé pour l'œil par la nature qui ne fait jamais rien d'inutile » Poggendorff. Histoire de la Physique)

9. Rôle de la diffraction. L'image d'une étoile n'est pas un point, mais un disque entouré d'anneaux. Pouvoir séparateur d'une lunette.

Même si une lentille était corrigée des deux aberrations de sphéricité et d'achromatisme, par le fait des ondulations, l'image d'un point lumineux ne pourrait être un point; elle doit nécessairement être formée par un disque central plus brillant au centre entouré d'une série d'anneaux.

Le diamètre du disque central varie en raison inverse de l'ouverture de l'objectif et est de 1'' pour une ouverture de 12 centimètres (Foucault, Dawes) indépendamment de la distance focale et du grossissement.

Cela a une grande importance quand il s'agit de distinguer des détails délicats sur les planètes ou de séparer des étoiles très voisines. Il faut que les disques centraux des images des deux étoiles soient séparés.

Avec une lunette d'ouverture insuffisante, on n'arriverait pas à séparer les disques avec n'importe quel grossissement.

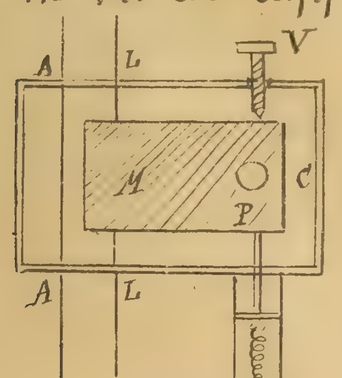
On admet que l'œil peut séparer environ 1'.

Mesure des angles – Cercles divisés – Verniers et Microscopes – Micromètre.

10 – La mesure des angles (différence d'azimut, distance angulaire de deux points ...) se fait au moyen des cercles divisés en degrés et subdivisions, sur lesquels se déplace une alidade (théodolite). Inversement le cercle divisé peut être mobile (cercle mural) devant des repères fixes.

Remarque – On ne mesure que des différences d'angles. Si une même quantité constante est ajoutée à toutes les lectures les différences ne seront pas altérées.

11 – Vis de rappel et de pression.



Au cercle alidade A est fixé un petit cadre évidé C, portant sur un côté l'écrou dans lequel s'engage une vis de rappel V et sur le côté opposé un cylindre creux dans lequel peut se mouvoir une tige métallique ; elle porte un disque qu'un ressort à boudin tend à pousser du côté de la vis V.

La pièce M (mâchoire), poussée entre la tige et l'extrémité de la vis est formée de deux petites plaquettes de cuivre, situées de part et d'autre du cercle limbe L et reliées par la vis de pression P. En serrant la vis P, on fixe la mâchoire sur le cercle limbe L ; le cercle alidade et le cercle limbe deviennent solidaires. La mâchoire desserrée peut glisser le long du cercle limbe avec le cadre C et le cercle alidade.

Pour viser un point, on desserre P, on fait tourner la lunette de manière à l'amener à peu près vers le point; on serre P. Ensuite, avec la vis V, on donne un petit mouvement pour que l'image du point se fasse exactement à la croisée des fils du réticule.

12 – Vernier – Appareil servant à évaluer les fractions d'angle quand l'extrémité de l'alidade ne coïncide pas exactement avec une des divisions du limbe. Il consiste en un petit arc divisé de même rayon que le limbe, dans le même sens et tel que les n divisions du vernier en vaillent $n-1$ du limbe.

Si le zéro du vernier (repère de l'alidade) coïncide avec un degré du limbe, la première division du vernier après le zéro se présentera avant celle du limbe; la différence sera le $\frac{1}{n}$ d'une division du limbe.

Entre les deux traits du vernier et du limbe qui viennent ensuite, la différence sera de $\frac{2}{n}$ d'une division du limbe, le trait du vernier se présentant avant celui du limbe.

Déplaçons l'alidade ou le zéro du vernier de $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, ... d'une division, il y aura coïncidence, avec un trait du limbe, du premier trait du vernier, du deuxième trait ...

D'où la règle: Pour évaluer la fraction de division entre le trait du limbe qui précède le zéro du vernier et ce zéro, prendre le rang du trait du vernier en coïncidence avec un trait du limbe et ajouter un nombre de fractions de divisions marqué par ce rang.

Les verniers sont gradués pour faciliter la pratique de la lecture.

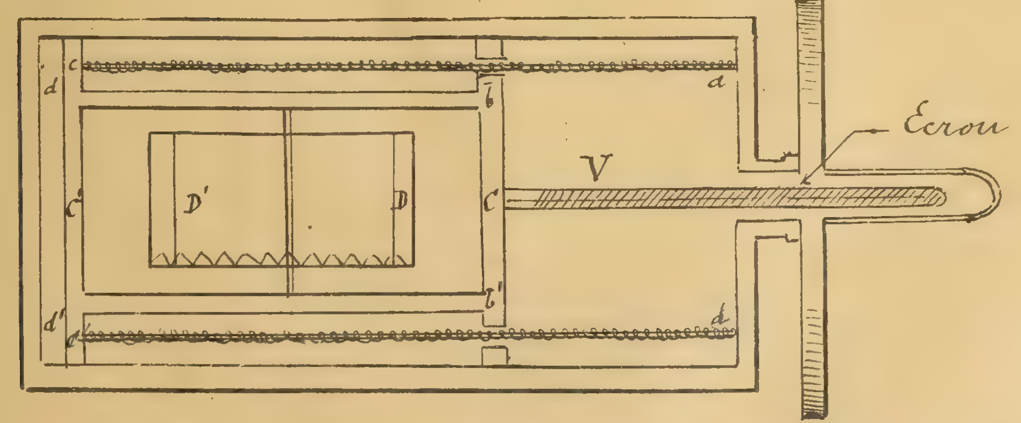
---

13. Substitution du microscope micrométrique au vernier.

Le microscope micrométrique est un microscope composé qui forme une image agrandie de la graduation au foyer de son objectif ; cette image est regardée avec un oculaire positif.

Dans le plan où l'image est formée, un cadre mobile portant un couple de fils d'araignée peut se déplacer par l'intermédiaire d'une vis à pas très petit ou vis micrométrique.

Coupe du microscope micrométrique suivant le plan focal.



La vis micrométrique V est fixée invariablement au cadre CC mobile dans la boîte du micromètre.

L'écrou est extérieur à la boîte et vient buter contre elle sous l'action de deux ressorts à boudin a c a'c' qui poussent constamment le cadre mobile vers la gauche de la figure.

Ces ressorts maintenus droits par les tiges a d, a'd' qui en forment les axes, prennent appui en a et a', passent librement en b et b' et agissent respectivement en c et c'.

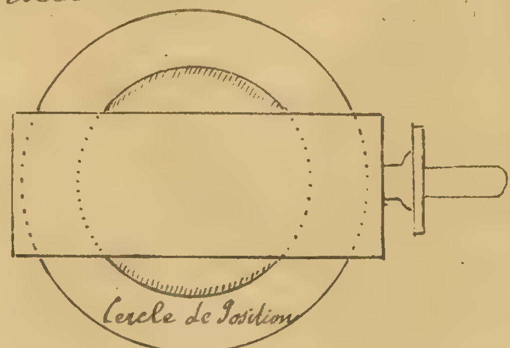
On s'arrange pour qu'une révolution du tambour déplace le couple de fils de 1' par exemple et que ce déplacement corresponde à une dent du peigne.

Si le tambour est divisé en 60 parties, l'une d'elle, vaut 1". Puisque l'origine des lectures est indifférente, on peut adopter comme direction repère celle définie par le centre optique et par le couple de fils amenés dans la position voisine de l'index du peigne, par zéro tour. Il suffit alors de compter le nombre des dents du peigne et le nombre des parties du tambour, quand le couple de fils est amené sur l'un des traits D ou D' pour obtenir la fraction de division.

14\- Micromètre - Les instruments d'Astronomie destinés aux mesures ont un micromètre semblable dans son principe à celui qui vient d'être décrit. Seulement, outre le fil mobile porté par le cadre C C', il y a un fil parallèle fixé à la boîte du micromètre et très voisin du plan dans lequel se déplace le fil mobile.

Dans les équatoriaux, la boîte du micromètre est mobile autour de l'axe de la lunette pour que la mesure des distances puisse être faite dans une direction quelconque.

L'orientation du micromètre et connue au moyen d'un petit cercle divisé appelé cercle de position, sur lequel la boîte du micromètre est fixée



On connaîtra la position relative de deux étoiles voisines a et b si après avoir



amené a et b à la fois sous le fil mobile, ce qui donne l'angle de position, on tourne la boîte de 90°, pour mesurer la distance de a b en pointant les deux étoiles simultanément avec les deux fils fixe et mobile.

15 – Comment on se rend compte de la fonction d'un instrument donné et de ses organes – Exemple – On a décrit dans ce qui précède les organes principaux des instruments. Si un instrument est donné, et si l'on veut en reconnaître la fonction, il faut examiner les relations des axes et des plans de l'instrument avec les plans et les directions remarquables, plan méridien; ligne des pôles...

Par exemple, on reconnait que les cercles Brosset, employés aux manipulations sont destinés à mesurer les différences d'azimuts.

On y distingue les organes suivants:

Lunette: il importe de mesurer l'ouverture de l'objectif qui détermine le pouvoir séparateur et d'évaluer le grossissement et le champ.

Cercle divisé: On distingue sur le limbe les grands traits des degrés et les traits intermédiaires correspondant à des intervalles de 20'.

Vernier: Il faut apprécier le degré de précision du Vernier. On constate que 39 divisions de 20' du limbe valent 40 divisions du vernier; le vernier donne le $\frac{1}{40}$ de l'intervalle c'est-à-dire

$$\frac{20'}{40} = \frac{20 \times 60''}{40} = 30''$$

Chapitre III.

Rectification des instruments.
Principales corrections à apporter aux observations.

1. Les instruments, leur ajustement et leur mise en place doivent obéir à des conditions géométriques déterminées. Il n'en peut être ainsi rigoureusement et toujours. Plutôt que de modifier l'ajustement pour le corriger, ce qui ferait tort à la stabilité, on préfère souvent tenir compte par le calcul des corrections nécessaires.

On a dit que la distance des étoiles étant presque infinie, les rayons visuels aboutissant à une étoile de diverses stations étaient parallèles. Pour la Lune, il n'en est plus ainsi, l'écart peut atteindre $\frac{1}{60}$ en parties du rayon soit 1°. On est dans l'usage de ramener les observations faites aux divers points de la Terre à une station idéale, au centre de la Terre. Il faut appliquer la correction de parallaxe.

Les rayons lumineux qui nous arrivent ont traversé l'atmosphère qui les dévie : Correction de réfraction.

On a pu observer un bord de l'astre, celui de la Lune par exemple au lieu du centre. Or l'usage est de rapporter les observations au centre de l'astre ; il faut donc effectuer une correction dépendant de la valeur du diamètre.

L'observateur peut commettre, à son insu, des erreurs : par exemple dans l'appréciation du temps, comme on le verra plus loin.

La liste des erreurs possibles est longue, et elle augmentera avec le temps. On se bornera pour le moment aux corrections principales.

Hipparque et Ptolémée tenaient compte de la Parallaxe de la Lune.

Tycho-Brahé fut le premier qui dressa des tables de réfraction (Astronomie de Lalande, N° 2166).

Il y a encore peu d'années, on ignorait l'existence des erreurs personnelles des observateurs.

2. Rectification du théodolite. Niveau à bulle. — L'axe du théodolite doit être rendu vertical. Dans cette opération et dans beaucoup d'autres, on emploie le niveau.

Le niveau est une fiole courbée en arc de cercle de grand rayon remplie presqu'entièrement d'un mélange d'alcool et d'éther et fermée à la lampe, comme il arrive pour un thermomètre, après expulsion de l'air. La fiole est enchassée dans une gaine fixée à une platine ou à un autre support de telle sorte que le plan de symétrie du niveau reste à très peu près vertical.

La partie supérieure du niveau porte des divisions chiffrées de sorte que l'on puisse lire et noter les extrémités de la bulle.

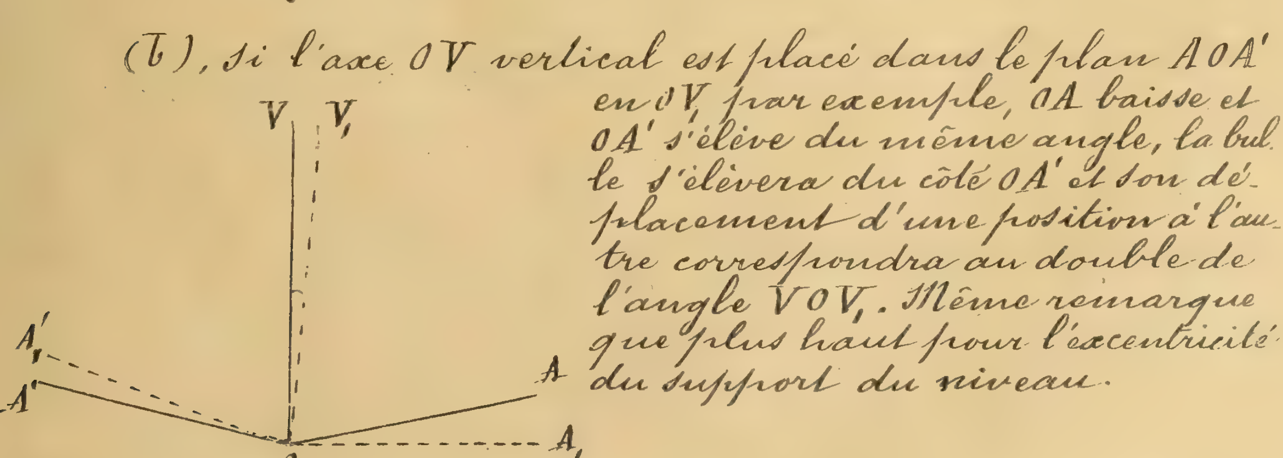
Principe. — quand l'inclinaison d'un niveau varie le plan de symétrie du niveau restant vertical, la bulle se dirige vers l'extrêmité du niveau qui s'élève, et le déplacement du milieu de la bulle est proportionnel à la variation d'inclinaison.

Conséquences:

(a), si l'axe OA sur lequel repose le niveau tourne autour de l'axe vertical OV, la bulle ne change pas quand on fait tourner OA en OA' de 180° autour de OV; il en est de même si l'axe OV, au lieu d'être vertical est légèrement déplacé dans le plan vertical passant par OV et perpendiculaire à AOA'. Le support du niveau peut être excentrique à l'axe de rotation OV.

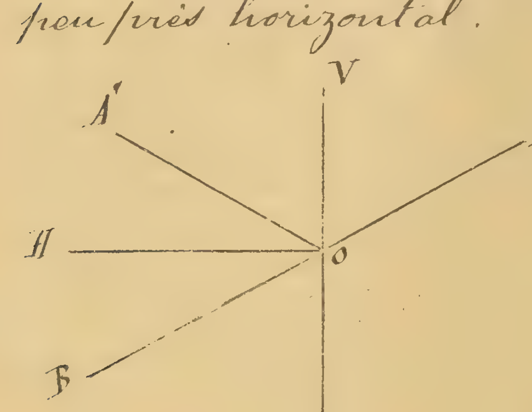
V
A'
A
O

(b), si l'axe OV vertical est placé dans le plan AOA' en OV_1 par exemple, OA baisse et OA' s'élève du même angle, la bulle s'élèvera du côté OA' et son déplacement d'une position à l'autre correspondra au double de l'angle VOV_1. Même remarque que plus haut pour l'excentricité du support du niveau.



(c) Un déplacement quelconque de l'axe OV se décompose dans les deux précédents. Le déplacement perpendiculaire au niveau est sans influence sur le retournement du niveau; le déplacement dans le plan vertical contenant le niveau entraîne un déplacement de la bulle double de celui qui correspond à la petite inclinaison de l'axe.

(d) Détermination de l'inclinaison d'un axe AB à peu près horizontal.



Faisons reposer le niveau sur AB puis retournons le bout pour bout et faisons le reposer de nouveau sur AB. L'opération du retournement équivaut à une rotation de 180° autour d'un axe vertical fictif OV, ce qui ne change pas la bulle, accompagnée du déplacement angulaire A'OB, par suite duquel la bulle doit se déplacer d'une quantité correspondante à l'angle A'OB = 2 HOB.

Donc m et m' étant les positions des milieux de la bulle dans les deux cas, l'inclinaison de l'axe i est donnée par

$$i = \frac{m' - m}{2};$$

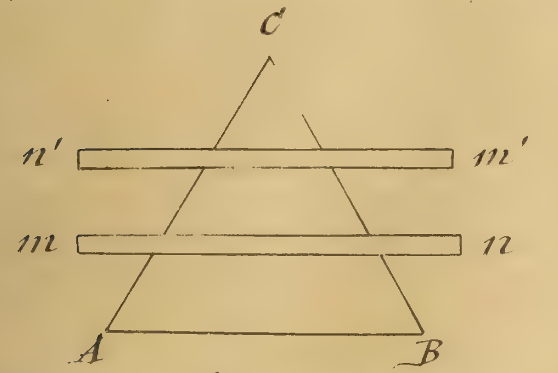
le nombre de divisions m' - m doit être transformé en secondes d'après la valeur des parties du niveau.

Les niveaux sont sensibles comme les thermomètres aux variations de température. Pour éliminer ces variations, on a l'habitude, après avoir retourné le niveau de revenir à la position initiale; la moyenne des 1° et 3° observations répond sensiblement au même instant physique que la 2° observation.

3. Usage du niveau pour rendre vertical l'axe principal du théodolite. Méthode suivie, 1° Placer l'axe dans un plan vertical perpendiculaire à la ligne de jonction de deux vis; 2° Redresser l'axe dans le plan vertical au moyen de la 3ième vis.

1° On amène le niveau m n dans la direction de deux des vis calantes A et B. On fait mouvoir une des vis A, B (ou plutôt les deux en sens contraire) de manière à amener la bulle

entre les repères, ensuite on retourne le niveau de 180° autour de l'axe vertical, en m'n'. Si la bulle reste entre les repères, l'axe est dans le plan vertical perpendiculaire à la ligne de jonction des vis [conséquence (a)]. Si la bulle s'est déplacée, l'axe s'écarte de ce plan vertical d'un angle correspondant à la moitié du déplacement de la bulle [conséquence (b)]. Pour mettre l'axe dans ce plan on agit sur les deux vis A et B en sens contraire et l'on ramène la bulle de la moitié du déplacement; l'axe doit être alors dans le plan vertical. En faisant parcourir à la bulle, avec la vis de rectification du niveau, l'autre moitié du déplacement, on rectifie le niveau.* On se trouve alors dans les mêmes conditions qu'au commencement du réglage; on le répète jusqu'à ce que la bulle soit entre les repères dans les deux positions m, n, m'n'.



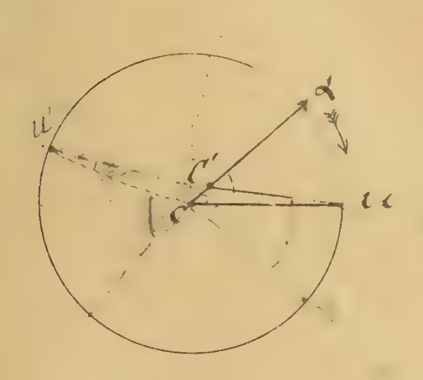
Après quelques tâtonnements, l'axe du théodolite se trouvera dans le plan vertical perpendiculaire à AB et le niveau sera rectifié.

2° On amène le niveau, désormais rectifié et auquel il ne faut plus toucher, perpendiculairement à AB et on agit sur la vis C pour amener la bulle entre les repères. Comme vérification, la bulle ne doit pas se déplacer quand le niveau tourne autour de l'axe.

A. Erreurs provenant de l'instrument.

4. Erreur d'excentricité dans le théodolite.

Cette erreur se produit lorsque le cercle qui porte les divisions n'est pas exactement centré sur l'axe autour duquel tourne l'alidade.



Soient C le centre du cercle gradué, C' le centre autour duquel tourne l'alidade, α la division à laquelle aboutit la droite CC', u la division du limbe qui répond à l'extrémité C'u de l'alidade.

* Le niveau est dit rectifié quand l'axe autour duquel il tourne étant dans un plan vertical perpendiculaire à la direction du niveau, la bulle est entre les repères.

Le limbe accuse une direction Cu qui diffère de la véritable du petit angle $p = CuC'$

Soit $CC' = d$, on a dans le triangle $CC'u$

$$\frac{\sin p}{d} = \frac{\sin(u-\alpha)}{C'u}$$

Il importe de se faire une idée de la correction avant de procéder au calcul complet

$C'u$ diffère très peu de $Cu = r$; $C'u = r$ si $d = 0$.

Donc on a pour le terme principal

$$\sin p = \frac{d}{r}\sin(u-\alpha);$$

en parties du rayon

$$p = \frac{d}{r}\sin(u-\alpha);$$

en secondes

$$p = 206265''\frac{d}{r}\sin(u-\alpha),$$

Il faudrait corriger chaque lecture u en ajoutant la correction p ; il faudrait pour cela connaître au préalable d et α

Voyons le degré d'importance de la correction p. Soit

$$r = 20 \text{ centimètres}, \ d = 0^{mm}01, \ \frac{d}{r} = \frac{1}{2.10^4}$$

p peut atteindre en secondes

$$206265''\frac{d}{r}, \text{ soit } 10'' \text{ environ}$$

Pour éviter d'avoir à tenir compte de cette erreur par le calcul, on emploie deux verniers opposés, on fait deux lectures au lieu d'une et on prend leur moyenne.

Pour la seconde lecture u', il faudrait prendre

$$u' + p' \text{ avec } p' = 206265''\frac{d}{r}\sin(u'-\alpha)$$

Comme

$$u' = 180° + u + \varepsilon,$$

il vient

$$p' = -206265''\frac{d}{r}\sin(u-\alpha+\varepsilon).$$

La correction p' est sensiblement égale à p et de signe contraire. Si l'on prend

$$\frac{u+p+u'+p'}{2} = \frac{u+u'}{2} + \frac{p+p'}{2}$$

les deux corrections p et p' se détruisent.

On a considéré le terme principal de la correction p.

Pour obtenir le développement en série de p, on part des relations ($C'u = r'$)

$$\begin{array}{l|c|c} r' \sin p = d \sin(u-\alpha) & \cos\frac{u-\alpha}{2} & -\sin\frac{u-\alpha}{2} \\ r' \cos p = r - d\cos(u-\alpha); & \sin\frac{u-\alpha}{2} & \cos\frac{u-\alpha}{2} \end{array}$$

on en déduit, en multipliant par les couples de facteurs indiqués à droite et ajoutant

$$r' \sin\left(p + \frac{u-\alpha}{2}\right) = (r+d)\sin\frac{u-\alpha}{2},$$

$$r' \cos\left(p + \frac{u-\alpha}{2}\right) = (r-d)\cos\frac{u-\alpha}{2},$$

$$tg\left(p + \frac{u-\alpha}{2}\right) = \frac{r+d}{r-d}\, tg\frac{u-\alpha}{2} = \frac{1+\frac{d}{r}}{1-\frac{d}{r}}\, tg\frac{u-\alpha}{2}$$

Le développement de Lagrange (chap. I, n° 29) donne

$$p + \frac{u-\alpha}{2} = \frac{u-\alpha}{2} + \frac{d}{r}\sin(u-\alpha) + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{r}\right)^2 \sin 2(u-\alpha) + \ldots$$

$$p = \frac{d}{r}\sin(u-\alpha) + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{r}\right)^2 \sin 2(u-\alpha) + \frac{1}{3}\left(\frac{d}{r}\right)^3 \sin 3(u-\alpha) + \ldots$$

Généralisation dans le cas d'un cercle gradué dont les divisions sont lues par n microscopes équidistants.

C'est le cas des cercles de grande dimension.

Supposons qu'il faille apporter à la lecture u de chaque microscope une correction $p(u)$ fonction de u représentée par une série trigonométrique

$$p(u) = a_1 \sin(u + A_1) + a_2 \sin(2u + A_2) + \ldots,$$

où les coëfficients a diminuent quand l'indice augmente.

Les lectures aux n microscopes seront

$$u, u+\frac{360^\circ}{n}+\varepsilon,\ u+2\frac{360^\circ}{n}+\varepsilon', \dots$$

Si l'on néglige les ε; si l'on prend le terme général de la série des erreurs

$$a_K \sin(Ku + A_K)$$

si l'on met à la place de u les n valeurs

$$u, u+\frac{360^\circ}{n}, \qquad u+2\frac{360^\circ}{n}, \dots$$

la somme des sinus d'arcs en progression arithmétique étant nulle quand après le dernier on retombe sur le point de départ, ce terme général donnera un résultat nul, à moins que K ne soit divisible par n. Donc

La moyenne des corrections prises pour n microscopes équidistants est, à peu près, exempte de tous les termes de la série des erreurs dont l'indice est inférieur à n.

Le nombre n ne dépasse guère 4, il est de 6 au plus.

5- Erreurs de division du cercle éliminées par la méthode de répétition.

Supposons qu'il s'agisse de la mesure d'une différence d'azimut avec le théodolite. Dans la méthode ordinaire on vise d'abord le point correspondant à la plus petite lecture soit A, et on lit le cercle horizontal; on décale ensuite le cercle alidade et on vise le point B: la différence des lectures donne la différence d'azimut.

La méthode de répétition utilise une vis de pression au pied de l'instrument: si on la desserre, tout l'instrument y compris le limbe horizontal peut tourner autour de l'axe vertical.

Au lieu de faire la lecture dans la seconde position, quand la lunette est pointée sur B, on laisse le cercle limbe et le cercle alidade réunis, et desserrant la vis de pression du pied de l'instrument, on ramène la lunette vers A; on serre la vis de pression du pied, et on répète l'opération ci-dessus;

la différence des lectures initiale et finale donne le double de l'angle cherché, le triple si l'on répète encore une fois l'opération etc.

α étant l'angle à mesurer, u et u' les lectures initiale et finale, ε et ε' les erreurs de ces lectures dues aux erreurs de division, n le nombre des répétitions, il vient

$$n\alpha = u' - u + \varepsilon' - \varepsilon \text{ d'où } \alpha = \frac{u'-u}{n} + \frac{\varepsilon'-\varepsilon}{n}.$$

La méthode de répétition permet donc d'avoir α avec précision même si les divisions sont mal tracées.

Cette méthode ingénieuse a perdu de l'importance à mesure que s'est perfectionnée la construction des cercles divisés.

B. Erreurs provenant de petits défauts d'orientation. Corrections des temps des passages observés à la lunette méridienne. Correction et marche de la pendule sidérale.

6. La lunette méridienne doit remplir les 3 conditions

1° axe optique perpendiculaire à l'axe de rotation;

2° axe de rotation horizontal;

3° axe de rotation perpendiculaire au plan méridien.

Malgré la rectification primitive, il subsiste de petites erreurs, d'autant plus que l'on évite de toucher souvent à l'instrument pour le rectifier; on préfère tenir compte par le calcul de l'effet des petites erreurs d'orientation mesurées fréquemment.

7. Pour mesurer l'erreur de perpendicularité de l'axe optique de la lunette et de l'axe de rotation ou erreur de collimation C, on emploie habituellement un collimateur avec une mire placée dans le prolongement de la lunette supposée horizontale.

mire

objectif du collimateur

objectif de la lunette

A' A

t t'

B B'

La mire qui n'est autre chose qu'une croisée de fils, est placée au foyer principal d'un objectif à grande distance focale.

En éclairant la mire, le faisceau des rayons parallèles va former l'image de la mire au foyer de l'objectif de la lunette.

Cela posé, si l'on vise la mire avec la lunette et si l'on échange les tourillons de la lunette, en la retournant comme l'on dit, la lunette, placée primitivement en AB, vient dans la position $A'B'$ symétrique de AB par rapport à la ligne des tourillons tt', et l'image de la mire se déplace de la quantité $2c$ par rapport au fil vertical du réticule.

Pour mesurer l'inclinaison i de l'axe de rotation tt', on se sert du niveau qu'on retourne (Chapitre III, n°2).

Quant à la troisième erreur, l'erreur d'azimut a, tenant à ce que le plan vertical décrit par la lunette (c et i étant supposées nulles) fait un petit angle avec le plan méridien, elle résultera des observations astronomiques elles-mêmes, comme on l'expliquera plus loin

Calcul des Corrections relatives aux erreurs c, i, a.

8 – La différence Δ entre l'heure du passage de l'étoile dans la lunette, dont la position est affectée par les erreurs c, i, a et l'heure du passage au méridien, est déterminée quand on

donne c, i, a et δ, λ quantités indépendantes entre elles.

$$\Delta = f(c, i, a, \delta, \lambda).$$

Développons Δ suivant les puissances des petites quantités c, i, a :

$$\Delta = \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)_0 c + \left(\frac{\partial f}{\partial i}\right)_0 i + \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)_0 a + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}\right)_0 a^2 + \dots$$

Si les corrections sont assez petites pour qu'on puisse négliger leurs carrés et produits

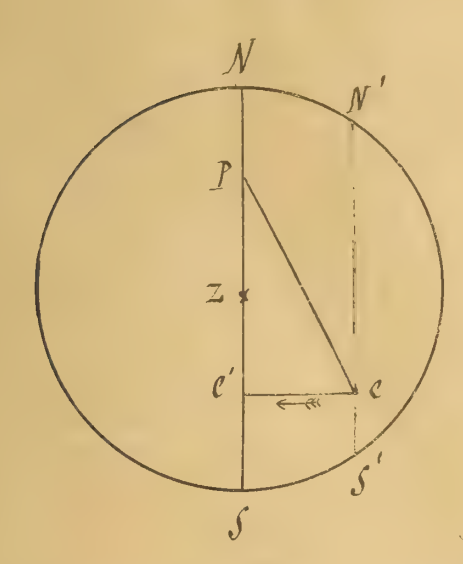
$$\Delta = \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)_0 c + \left(\frac{\partial f}{\partial i}\right)_0 i + \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)_0 a,$$

c'est-à-dire la somme des termes de correction calculés séparément :

la correction pour l'erreur c, i et a étant nulles,

la correction pour l'erreur i, c et a étant nulles,

la correction pour l'erreur a, c et i étant nulles.



9. - Erreur de collimation. - Dans ce cas l'extrémité de l'axe optique de la lunette, au lieu de décrire le méridien NS, décrit un petit cercle $N'S'$ (la sphère céleste est projetée sur le plan de l'horizon) distant du méridien de c.

Le passage de l'étoile est observé en c, il aurait lieu plus tard au méridien NS. La différence de temps est égale à l'angle horaire P évalué en temps.

Abaissons de c sur NS un arc de grand cercle pour former un triangle sphérique ; la distance de c à NS est égale à c.

On a, par l'analogie des sinus

$$\frac{\sin P}{\sin c} = \frac{1}{\sin \delta}, \quad P = \frac{c}{\sin \delta}$$

10. Erreur d'inclinaison — Dans ce cas, l'axe optique de la lunette décrit un grand cercle NcS (la sphère céleste est projetée sur le plan de l'horizon).

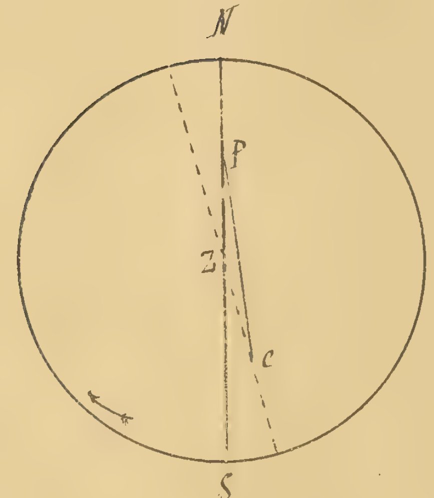
Le passage de l'étoile est observé en c, il aurait lieu plus tard au méridien NS ; la différence est égale à l'angle horaire P évalué en temps. Le triangle PSc donne

$$\frac{\sin P}{\sin Sc} = \frac{\sin i}{\sin \delta}.$$

Sc diffère très peu de la hauteur de l'étoile $= 90° - z$.

$$P = \frac{i \cos z}{\sin \delta}.$$

11. Erreur d'azimut — Dans ce cas, l'axe optique de la lunette décrit un vertical Zc. Il s'agit toujours de calculer l'angle horaire P.



On a dans le triangle PZc

$$\frac{\sin P}{\sin Zc} = \frac{\sin PZc}{\sin \delta}$$

Or

$$PZc = 180° - a, \quad Zc = z,$$

Donc

$$P = \frac{a \sin z}{\sin \delta}.$$

Ajoutant les trois corrections et divisant par 15 pour avoir, en secondes de temps, l'ensemble des corrections I si les écarts c, i, a sont supposés évalués en secondes d'angle

$$I = \frac{c}{15 \sin \delta} + \frac{i \cos z}{15 \sin \delta} + \frac{a \sin z}{15 \sin \delta}$$

T étant l'heure du passage observé à la pendule sidérale, l'heure corrigée sera

$$T + I;$$

l'heure T est suivant l'usage des Astronomes la moyenne des passages de l'étoile aux fils verticaux du réticule, au nombre de 5 ou 6 par exemple.

Si la pendule sidérale est bien réglée, on doit avoir pour l'étoile supposée bien connue

$$T + I = \text{Æ de l'étoile};$$

la différence

$$\text{Æ} - (T + I)$$

déduite de l'observation d'étoiles dont les coordonnées uranographiques sont bien connues, représente la correction de la pendule.

12. Détermination astronomique de l'azimut a au moyen des passages supérieurs et inférieurs d'une circompolaire.

On remarque que l'intervalle entre le passage supérieur et le passage inférieur suivant doit être égal à 12 heures.

12 heures $= T' + I' - T - I +$ marche de la pendule en 12 heures. T' et I' se rapportent au passage inférieur succédant au passage supérieur; Les corrections relatives aux erreurs c, i, a changent de signe; on s'en assure en considérant une étoile très voisine du pôle, remarquant que le parallèle est coupé par NS', NcS, Zc, en deux points c et c' du même côté du méridien NS; d'où résulte que si un passage a lieu trop tôt en c, par exemple, il aura lieu trop tard en c'; donc

$$I' = -\frac{c}{15 \sin \delta} - \frac{i \cos Z'}{15 \sin \delta} - \frac{a \sin Z'}{15 \sin \delta}$$

L'équation précédente fait connaître $I - I'$; c et i étant déterminés d'autre part, on connaîtra

$$\frac{a \sin Z}{15 \sin \delta} - \left(\frac{-a \sin Z'}{15 \sin \delta}\right) = a \frac{\sin Z + \sin Z'}{15 \sin \delta}$$

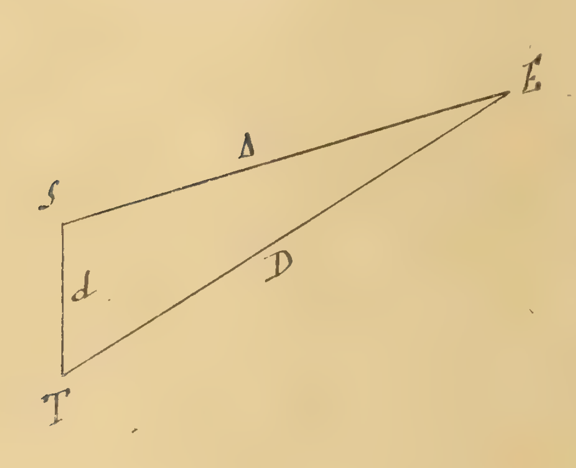
$$= a \frac{2 \sin \frac{Z + Z'}{2} \cos \frac{Z' - Z}{2}}{15 \sin \delta}$$

$$= a\,\frac{2\sin 1\cos\delta}{15\sin\delta} = a\,\frac{2\sin 1\cot g\,\delta}{15}$$

En prenant δ petit, c'est-à-dire en choisissant une circompolaire voisine du pôle, le coëfficient de a sera grand, ce qui est favorable à la bonne détermination de a.

Une fois connue la direction du méridien, la mire méridienne permettra de la retrouver.

C. Corrections de parallaxe pour ramener au centre de la Terre les observations faites à la surface (dans le cas d'astres voisins de la Terre, surtout dans le cas de la Lune)

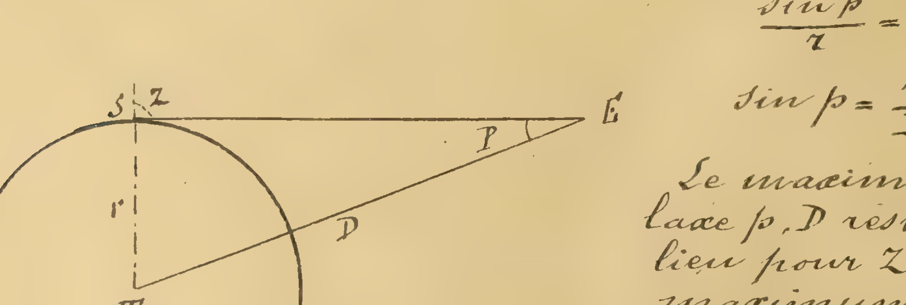


13 – Considérons le triangle formé par l'astre E, la station S de l'observateur, le centre T de la terre.

Il s'agit de calculer les changements que subiraient les coordonnées du point E, coordonnées, soit zénithales, soit locales, soit uranographiques, si l'observateur actuellement en S à la surface de la Terre, se transportait dans la station idéale du centre de la Terre.

Prenons le cas le plus simple, celui des coordonnées zénithales, la terre étant supposée sphérique. Dans le triangle STE, on a

$$\frac{\sin p}{r} = \frac{\sin Z}{D}$$



$$\sin p = \frac{r}{D}\sin Z$$

Le maximum de la parallaxe p, D restant constant, a lieu pour $Z = 90°$, soit P ce maximum $\sin P = \frac{r}{D}$, $\sin p = \sin P \sin Z$, et, avec une approximation souvent suffisante.

$$p = P\sin Z.$$

p est la parallaxe de distance zénithale (ou de hauteur)
P est la parallaxe horizontale.

Les azimuts ne sont pas changés par la parallaxe.

Pour la lune, on a, en partie du rayon, $P = \frac{1}{60}$, soit $\frac{57^\circ}{60}$ ou 1° environ, la correction peut donc être très importante.

Une fois trouvé l'effet de la parallaxe sur les coordonnées zénithales, on peut avoir l'effet de la parallaxe sur les coordonnées des autres systèmes, en employant les relations connues (Chapitre I, n° 21).

D. Correction de la Réfraction astronomique.

14. Cas des couches atmosphériques horizontales – Lorsqu'un rayon lumineux passe d'un milieu dans un autre plus dense, il se brise et se rapproche de la normale à la surface de séparation des deux milieux.

Les couches de l'atmosphère étant presque horizontales à cause de la grandeur du rayon de la sphère terrestre, il convient d'examiner d'abord ce cas simple très voisin de la réalité, et cela d'autant plus que le rayon lumineux s'écarte moins de la verticale.

La trajectoire lumineuse doit rester dans le vertical contenant la trajectoire lumineuse.

Considérons la réfraction du rayon lumineux à travers une couche homogène horizontale.

n^e couche — I_n — indice l_n
$(n-1)^e$ couche — I_{n-1} — R_{n-1} — indice l_{n-1}

$$\frac{\sin I_n}{\sin R_{n-1}} = \frac{l_{n-1}}{l_n}$$

et comme $R_{n-1} = I_{n-1}$

$$\frac{\sin I_n}{\sin I_{n-1}} = \frac{l_{n-1}}{l_n}$$

d'où

$$l_n \sin I_n = l_{n-1} \sin I_{n-1} = \dots = l_1 \sin z_1 ,$$

l'indice 1 se rapportant à la position de l'observateur.

Si l'on suppose les couches infiniment minces et les densités variant d'une manière continue, on peut dire que l'on a

$$(1) \quad l \sin I = \text{constante} = l_1 \sin z_1$$

tout le long de la trajectoire lumineuse.

A la limite de l'atmosphère la densité d de l'air est insensible; à cause de la relation

$$\frac{l^2-1}{d} = \text{const} = \text{Pouvoir réfringent de l'air},$$

il en résulte $l=1$; soit alors, ρ étant la réfraction

$$I = z_1 + \rho,$$

En mettant cette valeur de I et faisant $l=1$ dans la relation (1) il vient

$$\sin(z_1+\rho) = l_1 \sin z_1$$

ou

$$\sin z_1 \cos \rho + \cos z_1 \sin \rho = l_1 \sin z_1.$$

Dans une première approximation, ρ étant petit, on remplacera $\sin \rho$ par ρ et $\cos \rho$ par 1 d'où

$$\rho = (l_1 - 1) \operatorname{tg} z_1,$$

et en secondes, en remplaçant l_1 par sa valeur

$$(2) \quad \rho = 206265''(l_1-1) \operatorname{tg} z_1 = 60'' \operatorname{tg} z_1 \text{ (à peu près)}$$

Dans ce cas, on voit que les réfractions sont indépendantes de la loi des densités.

Si l'on s'éloignait beaucoup du zénith, la formule (2) deviendrait fautive: elle donne une réfraction infinie pour $z_1 = 90°$, alors qu'on trouve 34' environ par l'observation.

15. Equation différentielle de la réfraction dans le cas général.

Abordons la question générale en supposant la terre sphérique et l'atmosphère formée de couches homogènes concentriques.

Considérons la réfraction du rayon lumineux traversant une couche homogène (presque horizontale à cause de la valeur très grande du rayon).

La loi de réfraction nous donne

$$\frac{\sin I_n}{\sin R_{n-1}} = \frac{l_{n-1}}{l_n}$$

Le triangle ATB, formé en joignant A et B au centre T de la Terre donne

$$\frac{\sin R_{n-1}}{\sin I_{n-1}} = \frac{r_{n-1}}{r_n}$$

Multipliant ces deux équations membre à membre

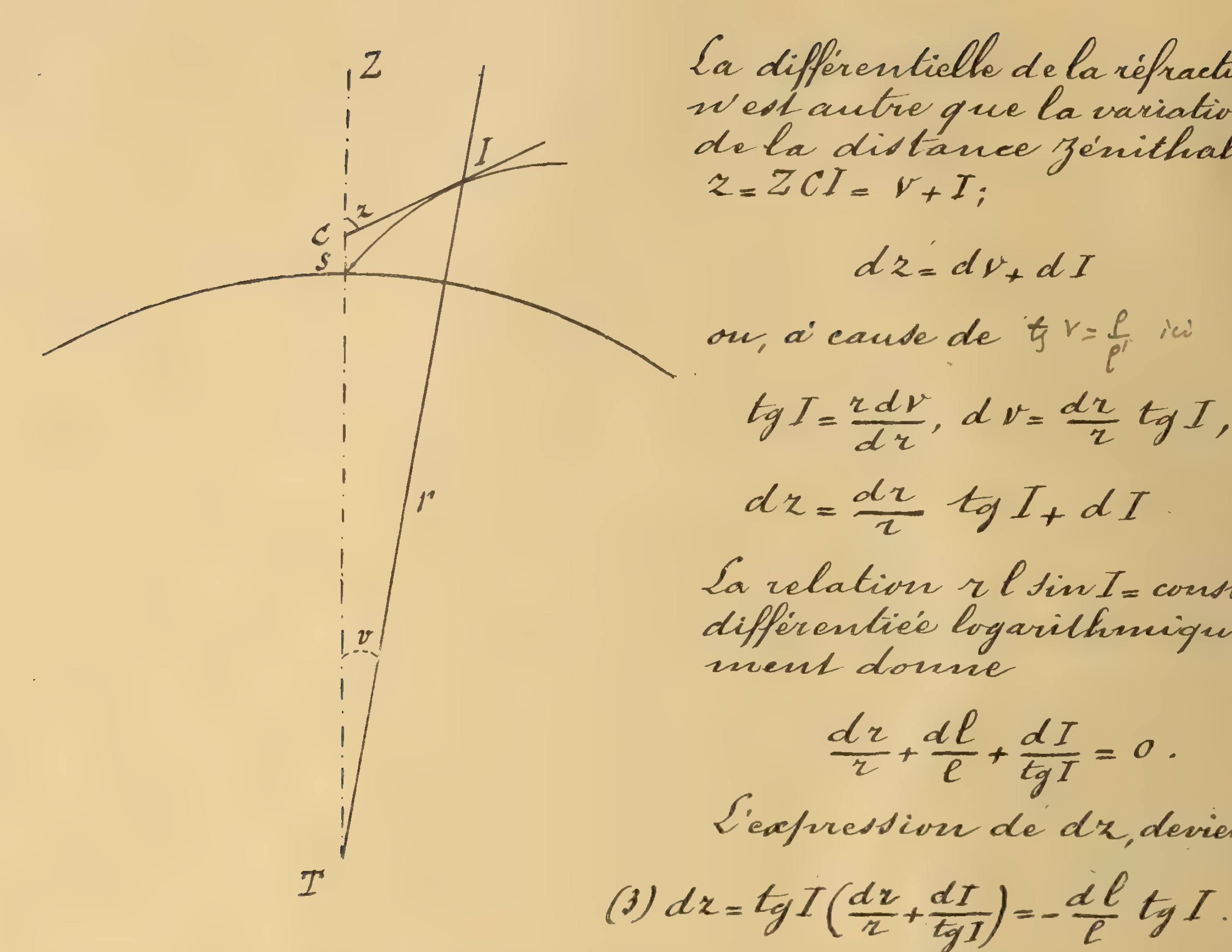
$$\frac{\sin I_n}{\sin I_{n-1}} = \frac{l_{n-1}\, r_{n-1}}{l_n\, r_n}$$

Par conséquent on a les relations

$$r_n l_n \sin I_n = r_{n-1} l_{n-1} \sin I_{n-1} = r_{n-2} l_{n-2} \sin I_{n-2} = \ldots = r_1 l_1 \sin z_1$$

Si l'on suppose les couches infiniment minces et les densités variant d'une manière continue, on a tout le long de la trajectoire lumineuse

$$r\, l \sin I = \text{Constante} = r_1 l_1 \sin z_1$$



La différentielle de la réfraction n'est autre que la variation de la distance zénithale $z = ZCI = v + I$;

$$dz = dv + dI$$

ou, à cause de $tg\, v = \frac{l}{l'}$ ici

$$tg\, I = \frac{r\, dv}{dr}, \quad dv = \frac{dr}{r}\, tg\, I,$$

$$dz = \frac{dr}{r}\, tg\, I + dI$$

La relation $r\, l \sin I =$ const. différentiée logarithmiquement donne

$$\frac{dr}{r} + \frac{dl}{l} + \frac{dI}{tg\, I} = 0.$$

L'expression de dz, devient

$$(3) \quad dz = tg\, I \left(\frac{dr}{r} + \frac{dI}{tg\, I} \right) = - \frac{dl}{l}\, tg\, I.$$

C'est l'équation différentielle de la réfraction.(1)

Pour l'intégrer, il faudrait avoir la relation qui existe entre l et I, ou d'après la condition

$$r\, l \sin I = \text{constante},$$

entre r et la densité d.

16. Données qu'on possède sur la constitution de l'atmosphère.

Elles proviennent des ascensions aérostatiques dont les plus célèbres sont celles de Gay-Lussac (7000ᵐ) et celles de Glaisher (8000ᵐ) et aussi d'observations faites sur les montagnes (observations du Puy de Dôme, du Pic du Midi . . .), d'expériences avec les ballons sondes . . .

On ne peut déduire de là une relation précise entre la densité et la hauteur au dessus de la surface, d'autant plus que l'état de l'atmosphère parait subir de petites oscillations du jour à la nuit et d'une saison à l'autre

---

(1) Biot a montré (Journal des savants, 1836) que Newton possédait une théorie exacte de la réfraction.

17. Laplace et d'autres savants ont perfectionné la théorie de la réfraction, mais il subsiste des incertitudes pour les grandes distances zénithales. On doit multiplier les observations pour éliminer l'effet des petites oscillations de l'atmosphère, et on doit multiplier les observatoires si l'on veut que dans chacun les distances zénithales à observer ne soient pas trop grandes.

18. Comment on tient compte de la température et de la pression pour calculer la réfraction.
Bornons nous au terme principal

$$\rho = 206265''(\ell_1 - 1) \operatorname{tg} z_1 .$$

A cause de

$$\frac{\ell_1^2 - 1}{d_1} = \text{constante} = \text{Pouvoir réfringent de l'air},$$

$\ell_1 - 1$ est sensiblement proportionnel à d_1.

Si l'on a calculé une table de réfractions pour la pression barométrique 0^m760 et la température θ_0, il faudra multiplier le nombre trouvé par

$$\frac{H}{0^m,760} \times \frac{1}{1+\alpha(\theta-\theta_0)}$$

si la température est θ et la pression H.

19. Détermination empirique, au moyen des circompolaires, des coëfficients de la formule de réfraction.

$$\rho = \alpha \operatorname{tg} z_1 + b \operatorname{tg}^3 z_1 + ..$$

La théorie a conduit à des expressions de cette forme. On peut, sans avoir égard à la valeur théorique des coëfficients, les déterminer a posteriori d'après l'ensemble des observations.

Supposons, pour simplifier que les observations soient ramenées à une même température θ_0 pour laquelle les tables de réfraction sont construites; soient z_1 et z_1' les distances zénithales des étoiles circompolaires à leurs deux passages

au méridien supérieur et inférieur; ρ et ρ' les réfractions correspondantes, on aura les distances zénithales.

$$Z = Z_1 + \rho \qquad Z' = Z'_1 + \rho'$$

et la colatitude

$$\lambda = \frac{Z + Z'}{2} \quad (\text{Chapitre I, n° 19})$$

On sera donc conduit à des équations de condition telles que

$$2\lambda - Z - Z' = 0$$

$$2\lambda - a(\operatorname{tg} Z_1 + \operatorname{tg} Z'_1) - b(\operatorname{tg}^3 Z_1 + \operatorname{tg}^3 Z'_1) - \dots = Z_1 + Z'_1$$

2λ, a, b sont les inconnues.

On multipliera les observations pour avoir un nombre d'équations aussi grand que possible et on les résoudra par la méthode des moindres carrés qui sera expliquée plus loin.

20. Comparaison des effets de la parallaxe et de la réfraction.

On les résume en disant que la parallaxe abaisse et que la réfraction relève les astres.

L'une est proportionnelle au sinus, l'autre à la tangente de la distance zénithale Z :

$$p = P \sin Z, \quad \rho = 60'' \operatorname{tg} Z,$$

On a $P = 60''$ environ pour la Lune. $P = 9''$ pour le Soleil, $P = 0$ pour les étoiles.

La réfraction étant d'environ 34′ à l'horizon, et les diamètres du Soleil et de la Lune d'environ 32′, il en résulte que ces deux astres paraîtront encore sur l'horizon alors qu'ils sont tangents au cercle de l'horizon et au dessous.

Un autre effet de la réfraction est de déformer les disques du Soleil et de la Lune qui, près de l'horizon, paraissent aplatis.

E- Corrections ou équations personnelles à l'observateur.

22- Jusqu'au commencement du XIXième siècle on n'avait pas pensé qu'il pût y avoir une différence sensible entre les instants des passages méridiens d'une étoile notés par deux observateurs.

Bessel, célèbre astronome allemand appela, en 1823, l'attention sur ces différences: il y avait plus d'une seconde d'écart dans l'estimation des passages d'étoiles entre lui et un autre observateur célèbre Argelander.

Depuis ce temps, on a pris l'habitude d'étudier les erreurs de l'observateur aussi bien que celle des instruments. Les observateurs peu exercés observent les passages généralement trop tôt, par précipitation. Le passage des étoiles brillantes sont observés plus tôt que ceux des étoiles faibles . . .

L'art des observations consiste, d'une manière générale, à reconnaître les erreurs instrumentales ou autres, à les évaluer ou à combiner les observations de manière que les erreurs se détruisent. On en a vu un exemple pour l'erreur d'excentricité.

Chapitre IV.

Mouvement apparent du Soleil : définition du jour, des climats terrestres, des saisons. Mesure du temps, équation du temps - Cadrans solaires. Horloges. Chronomètres.

1. Les instruments pour la mesure des angles ne supposent pas nécessairement la connaissance des théories astronomiques. Il n'en est pas de même pour la mesure du temps qui, en fait, suppose la connaissance de la théorie du Soleil et la construction de mécanismes d'horlogerie. La théorie du Soleil remonte, dans ses traits principaux, aux Anciens : l'horlogerie de précision date du XVIIième siècle.

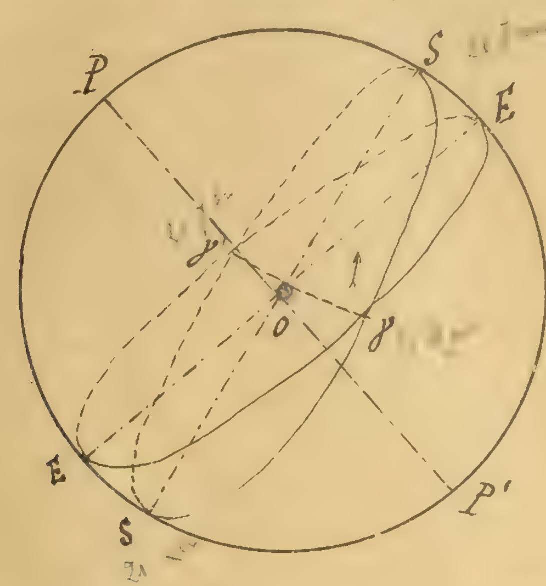
Le rôle du Soleil est d'une importance capitale : non seulement il définit les jours, les climats terrestres, les saisons de l'année, mais il sert à obtenir la donnée essentielle du temps, en ce sens qu'il permet de contrôler et de rectifier à des intervalles assez rapprochés les indications des horloges ou chronomètres.

2. Définitions. Si l'on observe régulièrement le Soleil, à midi à son passage au méridien (on a soin de mettre un verre noir devant l'œil) la lunette méridienne et la pendule sidérale donnent par la moyenne des heures des passages des deux bords l'ascension droite Æ du centre ; le cercle mural donne de même, par la moyenne des distances zénithales des deux bords, la distance zénithale du centre du Soleil. On en conclut les distances polaires du centre du Soleil ou les déclinaisons.

On trouve des Æ successivement croissantes d'environ $\frac{24^h}{360} = \frac{24 \times 60^m}{360} = 4$ minutes de temps, d'un jour à l'autre parce que le Soleil fait le tour du ciel dans une année et des déclinaisons comprises entre les deux limites $\pm 23°\frac{1}{2}$, ou si l'on veut des distances polaires comprises entre

$$90° - 23°\frac{1}{2} = 66°\frac{1}{2} \text{ et } 90° + 23°\frac{1}{2} = 113°\frac{1}{2}.$$

La suite des positions du Soleil marquées sur un globe céleste forme le grand cercle appelé écliptique parcourue par le soleil dans le sens direct et dont se rapprochent les trajectoires de la Lune et des planètes.



L'écliptique coupe l'équateur céleste en deux points γ, γ'; γ point vernal est celui où le Soleil monte de l'hémisphère austral dans l'hémisphère boréal. La date de ce passage est vers le 21 Mars, c'est le moment de l'équinoxe du printemps, l'équinoxe d'Automne a lieu quand le soleil est en γ', vers le 21 Septembre.

Le plan diamétral perpendiculaire à γγ' coupe l'écliptique aux deux points SS', où le Soleil atteint sa plus petite et sa plus grande distance polaire. Les époques correspondantes sont celles du solstice d'été (vers le 21 juin) et du solstice d'hiver (vers le 21 Décembre); le Soleil décrit alors dans son mouvement diurne apparent les cercles appelés tropiques.

Les quatre points γ, S, γ', S' partagent l'orbite apparente du soleil en quatre parties qui correspondent aux quatre saisons; le printemps commence quand le Soleil traverse en γ l'équateur céleste.

3_ Inégalités des jours et des nuits, dans les différents lieux de la terre et aux différentes époques de l'année. Crépuscule_ Lumière zodiacale.

La durée du jour c'est-à-dire celle de la présence du Soleil sur l'horizon d'un lieu donné (abstraction faite de la

réfraction qui relève l'astre) est double de l'angle horaire ZPA à l'instant du coucher.

En faisant dans la relation fondamentale

$$\cos z = \cos \lambda \cos \delta + \sin \lambda \sin \delta \cos H, \quad z = 90°,$$

on trouve

$$\cos H = -\cot \lambda \cot \delta ;$$

la colatitude λ varie suivant les lieux de la Terre ; la distance polaire δ varie suivant l'époque de l'année et reste comprise entre

$$90° - 23°\tfrac{1}{2} = 66°\tfrac{1}{2} \text{ et } 90° + 23°\tfrac{1}{2} = 113°\tfrac{1}{2}.$$

A Paris la durée du jour est comprise entre 8^h et 16^h.

La durée du jour est augmentée par la présence de l'atmosphère qui se trouve éclairée par le Soleil bien que celui-ci soit au dessous de l'horizon. C'est ce qu'on appelle, le soir le crépuscule (l'aurore, le matin). L'observation montre que le crépuscule finit quand le Soleil est à 18° au dessous de l'horizon. Il est d'autant plus long qu'on avance davantage vers le Nord ; par ce qu'alors les parallèles diurnes coupant très obliquement l'horizon, le soleil met beaucoup de temps pour s'abaisser de 18°.

En Suède, il n'y a pas de nuit complète pendant l'été.

On aperçoit parfois, quand le ciel est pur, le matin à l'Aurore (en Août et Septembre) ou le soir au crépuscule (en février et Mars) une lueur d'un rouge pâle dirigée dans le sens de l'écliptique ; elle s'appelle la lumière zodiacale. L'origine de cette lueur est mal connue.

4. Variation de la distance zénithale méridienne du Soleil dans les différents lieux de la Terre et aux différentes époques de l'année.

On a, en désignant par z_m la distance zénithale méridienne

$$z_m = \delta - \lambda$$

Cet élément est important à considérer, parce que la

température dépend non seulement de la durée du jour, mais encore de l'obliquité des rayons du soleil à midi sur l'horizon du lieu

A Paris, au solstice d'été, à midi,

$$z_m = 66^\circ\tfrac{1}{2} - 41^\circ = 25^\circ\tfrac{1}{2}$$

au solstice d'hiver

$$z_m = 113^\circ\tfrac{1}{2} - 41^\circ = 72^\circ\tfrac{1}{2}$$

En hiver, les rayons du soleil rasent seulement le sol.

5. Division de la terre en cinq zônes. – La discussion des deux formules ci-dessus

$$\cos AH = -\cot\lambda \cot\delta,$$

$$z_m = \delta - \lambda$$

(δ varie entre 90° + 23°½ et 90° − 23°½)

conduit à partager la Terre en cinq zônes symétriques par rapport à l'équateur. Considérons d'abord l'hémisphère boréal.

Pour qu'il y ait succession de jours et de nuits d'après la première formule, il faut que λ ait une valeur assez grande

$$\lambda \geq 23^\circ\tfrac{1}{2}$$

($\cot\lambda \cot\delta \leq 1$ $\quad \cot\lambda \leq \tan(90^\circ - \delta)$ $\quad \cot\lambda \leq \cot 23^\circ\tfrac{1}{2}$ $\quad \lambda \geq 23^\circ\tfrac{1}{2}$)

la calotte polaire boréale ou arctique s'étend à 23°½ du pôle boréal. Dans cette région, c'est seulement lorsque le soleil est assez près de l'équateur céleste qu'il y a succession de jours et de nuits; le reste du temps, il y a jour ou nuit continus (suivant que le soleil est au dessus ou au dessous de l'équateur), le soleil restant toujours très bas sur l'horizon, d'après la relation $z_m = \delta - \lambda$.

B P A E A' B' P'

Pour une colatitude de $\lambda > 23^\circ\tfrac{1}{2}$ il y a succession de jours et de nuits. La formule

$$z_m = \delta - \lambda$$

[Marginal notes:] zônes – [illegible] y aura [illegible] latit[ude] [illegible] n'y aura pas $< 90^\circ$ $\delta - \lambda < 90^\circ$ $\delta < 90^\circ + \lambda$ [illegible] de ce moment il y a jour et nuit. Pour qu'il y ait [illegible] continu – il faut $\delta < 90^\circ - \lambda$ hauteur du pôle au dessus de l'horizon – Au cercle arctique le soleil ne se lèvera pas une fois par an – il ne se couchera pas une fois par an – Au pôle 6 mois de jour, 6 mois de nuit

montre que la distance zénithale z_m peut devenir nulle à partir du lieu où

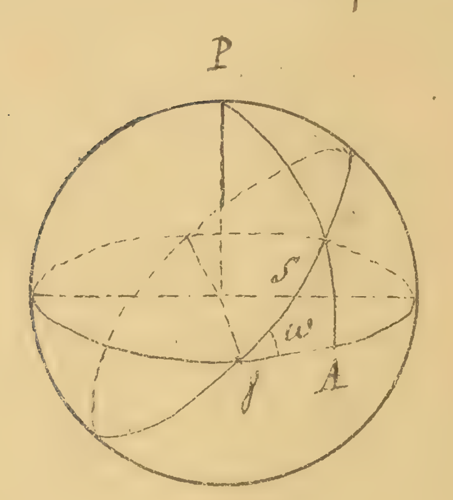
$$\lambda = 66^\circ \frac{1}{2}$$

Cette valeur correspond au parallèle qui limite la zône torride dans laquelle le soleil passe (deux fois par an) au zénith de chaque lieu. La zône intermédiaire est la zône tempérée.

On trouverait des résultats analogues pour l'hémisphère austral.

La discussion des deux formules ci-dessus montre encore que pour les lieux de colatitudes $90^\circ - \lambda$ et $90^\circ + \lambda$ et pour les distances polaires $90^\circ - \delta$ et $90^\circ + \delta$ que le soleil acquiert à six mois d'intervalle, on a les mêmes valeurs de H et de z_m. En d'autres termes, tout se passe dans l'hémisphère austral comme dans l'hémisphère boréal, à six mois d'intervalle.

6. Détermination du point γ par rapport aux étoiles et de l'obliquité de l'écliptique.



Chaque jour, le Soleil est observé en même temps que quelques étoiles, on a la position du Soleil relativement à ces étoiles supposées connues par leurs coordonnées uranographiques.

Il s'agit de déterminer la position du point γ relativement aux étoiles; c'est ce point qui est pris comme origine des ascensions droites. Peu importe que ce soit un point fictif, du moment qu'il sera relié aux étoiles et qu'on déterminera son mouvement.

Soient $\mathcal{R}'$ la différence d'ascension droite du Soleil et d'une étoile.

α l'ascension droite de cette étoile.

δ la distance polaire du Soleil, corrigée de la réfraction et de la parallaxe.

On aura

$$\mathcal{R}\ (\text{du Soleil}) = \mathcal{R}' + \alpha .$$

Dans le triangle sphérique rectangle γSA, on a d'après la règle mnémonique,

$$tg\,\omega = \frac{tg\,SA}{\sin \gamma A} = \frac{\cot g\,\delta}{\sin Æ}$$

ou

$$tg\,\omega \sin(Æ'+\alpha) = \cot g\,\delta$$

On développe le sinus et on pose

$$\cos\alpha\, tg\,\omega = x, \qquad \sin\alpha\, tg\,\omega = y$$

il vient

$$x \sin Æ' + y\cos Æ' = \cot g\,\delta.$$

Il suffirait de deux observations pour déterminer x, y et l'on déduirait ensuite les valeurs de α et ω des relations

$$\cos\alpha\, tg\,\omega = x,$$

$$\sin\alpha\, tg\,\omega = y;$$

on prendra en plus grand nombre les observations.

Pour déterminer le point d'intersection γ de l'équateur avec l'écliptique, il est clair qu'il faut prendre les positions du soleil voisines de l'équateur; et pour déterminer l'obliquité ω, il faut prendre les positions du Soleil voisines des solstices.

On vérifie que le soleil décrit une trajectoire plane. Le point γ se trouve, comme il a été dit déjà dans la constellation des Poissons. L'angle ω est de $23^\circ\frac{1}{2}$ environ.

7. Année tropique. C'est l'intervalle entre deux passages consécutifs du Soleil par le point γ. A l'instant d'un passage l'Æ du Soleil = 0 et δ (corrigée de la réfraction et de la parallaxe) = 90°; le soleil est dans l'équateur;

Si l'on a observé le Soleil plusieurs jours de suite dans le voisinage de γ, on peut conclure, par interpolation, l'heure sidérale où la condition $\delta = 90^\circ$ est satisfaite.

Pour avoir une idée de la précision avec laquelle on peut fixer l'instant de l'équinoxe, on cherche la variation de δ en un jour;

plus cette variation est forte, plus la précision avec laquelle on peut calculer l'époque où $\delta = 90°$ est grande. On différentie la relation

$$\cot \delta = \tan \omega \sin Æ$$

$$-\frac{d\delta}{\sin^2 \delta} = tg\, \omega \cos Æ\, d Æ\,;$$

près de γ, on peut faire

$$\sin \delta = 1, \cos Æ = 1,$$

d'où, à peu près,

$$\frac{d\delta}{d Æ} = -\, tg\, \omega\,.$$

Si l'on se souvient que l'Æ du Soleil augmente environ de 4^m par jour, c'est-à-dire, en angle, de $1° = 3600''$ il vient pour la variation de δ en un jour de $86400^s = 1440^m$

$$tg\, \omega \times 3600'' = 1422'',$$

soit 1'' par minute.

Si les distances polaires peuvent être affectées d'erreurs comparables à 1'', la détermination de l'équinoxe peut donc être affectée d'une minute d'erreur.

Pour avoir une valeur plus précise de la longueur de l'année tropique, on comparera deux équinoxes séparés par un grand nombre d'années.

On a trouvé ainsi, comme valeur moyenne

longueur de l'année tropique $= 366^{jours},2422$ (jours sidéraux)

8 - Longitude du Soleil - Inégalités de son mouvement - Excentrique d'Hipparque - Il s'agit d'étudier le mouvement du Soleil dans son orbite. L'angle parcouru par le Soleil sur l'écliptique à partir d'un point fixe pris pour origine s'appelle longitude. On prend pour ce point fixe le point vernal γ, comme pour les ascensions droites

Dans le triangle γSA, S étant la position du Soleil sur l'écliptique, la longitude L du soleil est l'angle correspondant à l'arc γS; γA est l'arc correspondant à l'ascension droite.

La relation entre L, ω et Æ dans le triangle rectangle γSA s'obtient par la règle mnémonique.

$$\cos \omega = \frac{tg\, \gamma A}{tg\, \gamma S}$$

$$tg\, L = \frac{tg\, Æ}{\cos \omega}$$

Supposant connues les Æ du Soleil de jour en jour, on peut obtenir par le calcul les longitudes L.

A première vue, on voit que les longitudes L croissent comme les Æ. Si l'on compare aux observations les valeurs de L calculées pour les époques correspondantes par la formule

$$L = L_0 + nt$$

en prenant

$$n = \frac{360°}{\text{nombre de jours de l'année tropique}}$$

on trouve que les résidus présentent une allure systématique et peuvent être représentés par un terme périodique de sorte qu'on a à très peu près

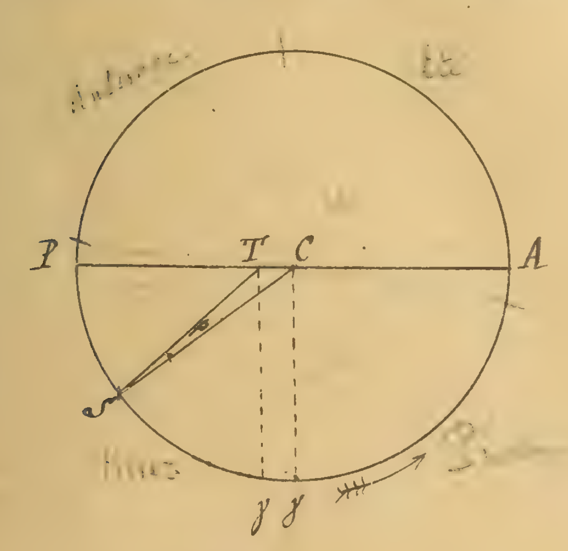
$$L = L_0 + nt + 1°56' \sin(L_0 + nt - 280°)$$

Hipparque (130 avant J.C), qui connaissait ce résultat l'a interprété géométriquement.

Ecrivons

$$L - 280° = L_0 + nt - 280° + 1°56' \sin(L_0 + nt - 280°).$$

Dans le plan de l'écliptique, à partir de la direction C♈ origine des longitudes, prenons un angle de 280° auquel correspond la direction CP.



Supposons que la position de S soit définie sur le grand cercle par la longitude $L_0 + nt$ comptée toujours à partir de la direction origine et dans le sens direct; on aura

$$L_0 + nt - 280° = \text{angle } PCS$$

Cela posé, les longitudes observées ne différeront pas sensiblement de celles qu'on trouverait en plaçant la terre en T sur PA à une distance convenable de C et comptant les longitudes à partir de T♈ parallèle à C♈.

Soient en effet r le rayon du grand cercle, d la distance TC,

On a

$$\text{longitude comptée autour de } T = \widehat{PTS} - \widehat{PCS} + p$$
$$= L_0 + nt - 280° + p.$$

Calculons p

$$\frac{\sin p}{d} = \frac{\sin(L_0 + nt - 280°)}{TS}$$

et, en ne conservant que les termes du 1er degré en $\frac{d}{r}$

$$\sin p = \frac{d}{r} \sin(L_0 + nt - 280°);$$

en angle

$$p = 3438' \frac{d}{r} \sin(L_0 + nt - 280°).$$

Il suffit donc de prendre

$$3438' \frac{d}{r} = 1°56 = 116'$$

ou

$$\frac{d}{r} = \frac{1}{30} \text{ (environ)}$$

pour que le mouvement supposé uniforme du Soleil sur le cercle excentrique représente les observations.

Quelle que soit la valeur de l'interprétation, elle rend compte du mouvement du Soleil en longitude.

On peut remarquer les conséquences : au point P le mouvement en longitude est plus rapide (ce qui résulte du reste de la formule des longitudes) comme si le Soleil était à ce moment plus près de la Terre, d'où le nom de périhélie donné au point P.

Au point opposé A, le mouvement du Soleil en longitude est le plus lent ; c'est l'aphélie.

9. Durée des saisons. – Le printemps commence lorsque le Soleil arrive au point γ, quand la longitude L du Soleil est nulle ; les autres saisons commencent quand cette longitude L devient égale à 90°, 180°, 270°.

Or on a trouvé

$$L = L_0 + nt + 1°56' \sin(L_0 + nt - 280°);$$

en supposant par exemple que t soit évalué en jours, il faudra remplacer n par

$$n = 59'8''$$

mouvement du Soleil en 1 jour.

De l'équation précédente, ou $L_0 + nt$ sera regardée comme inconnue, quand on fait

$$L = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$$

on tirera les valeurs de $L_0 + nt$ correspondantes et ensuite les nombres de jours pour chaque saison.

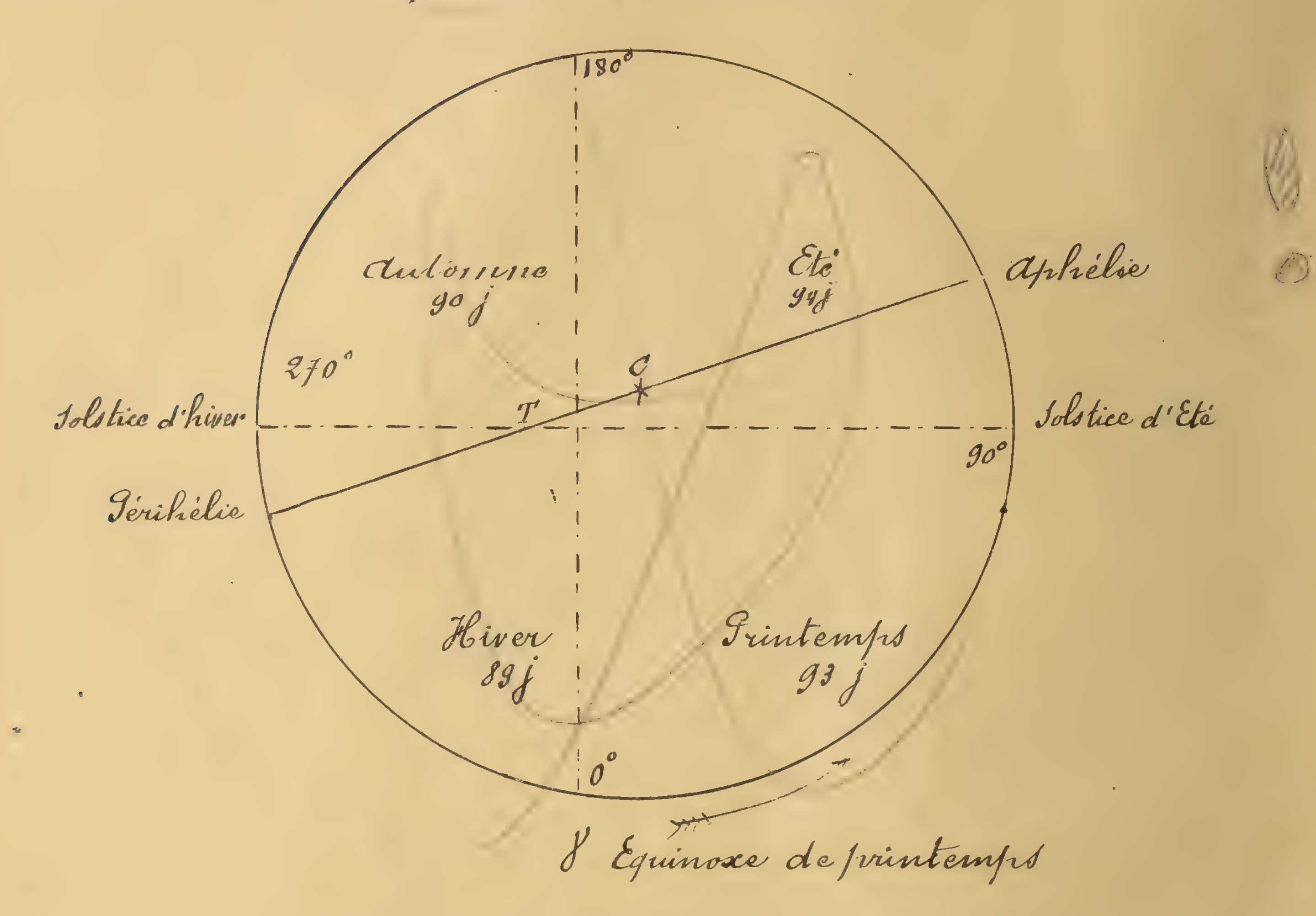
Les saisons n'ont pas la même durée, le mouvement en longitude n'étant pas uniforme

Le printemps a une durée de 93 jours en moyenne
L'Eté a une durée de 94 jours "
L'Automne a une durée de 90 jours "
l'Hiver a une durée de 89 jours "

L'été est la saison la plus longue et l'hiver la plus courte.

Les différences entre les durées des saisons obtenues par l'observation directe d'après les époques des équinoxes et des solstices montraient aux anciens que le mouvement en longitude du Soleil n'était pas uniforme ; Hipparque expliqua ces différences comme on l'a vu (ce chapitre (N° 8) par le mouvement excentrique du soleil.

On doit remarquer (ce chapitre N° 5) que les saisons sont opposées dans les deux hémisphères, puisque ce qui a lieu pour l'un, a lieu pour l'autre six mois plus tard.



10. Indications sur les procédés employés par les Anciens.

Au moyen du gnomon il était facile d'obtenir, aux moments des deux solstices, la plus grande ombre et la plus petite d'où les valeurs des deux distances zénithales méridiennes $z_m = \delta - \lambda$:

Solstice d'été : $90° - \omega - \lambda$; Solstice d'hiver $90° + \omega - \lambda$

On déduisait de là ω et λ.

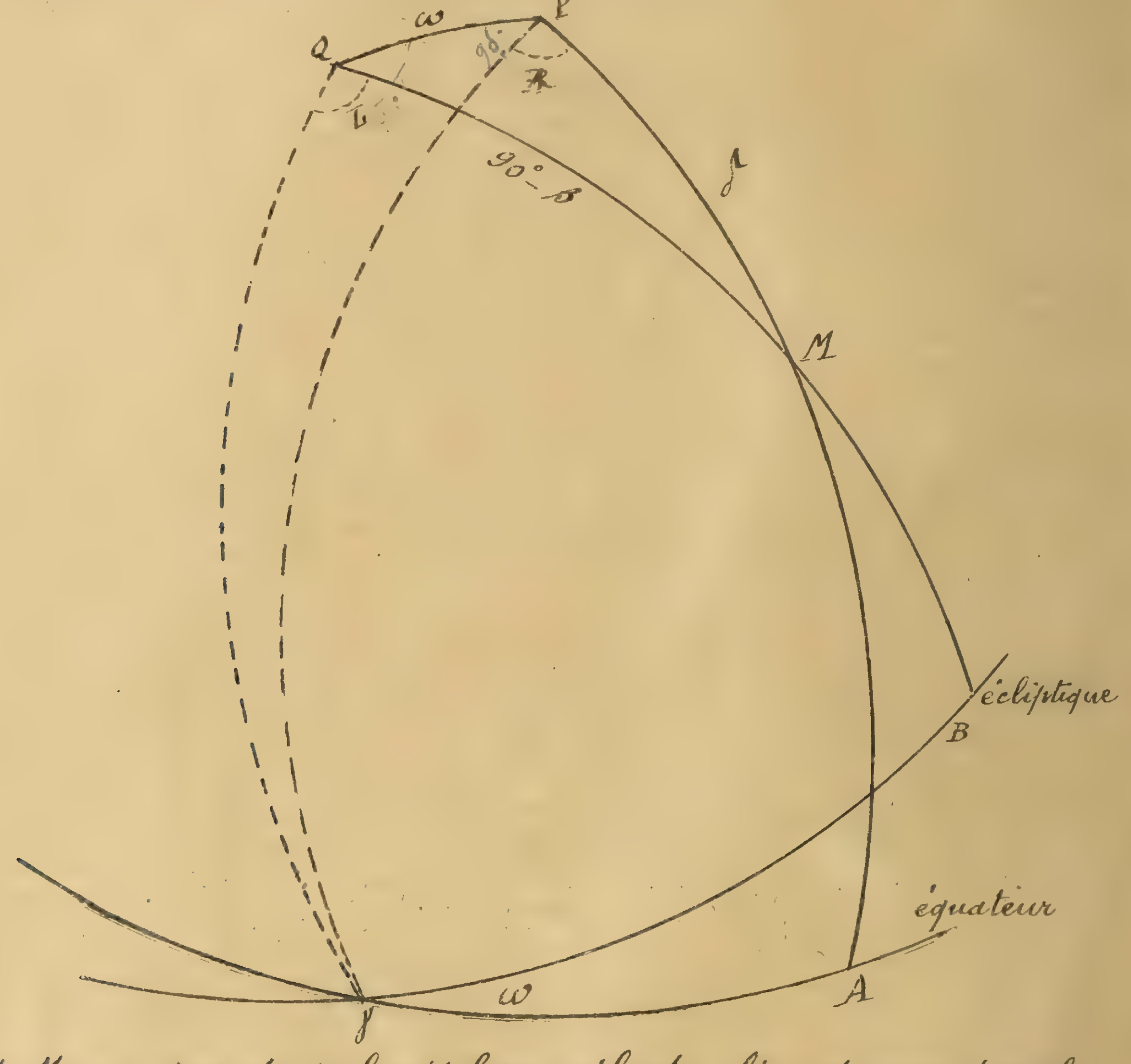
λ étant connu, on avait l'inclinaison du plan de l'équateur céleste ; on pouvait installer de grands cercles en métal dans le plan de l'équateur (armilles). Lorsque l'ombre de la partie supérieure d'un des équateurs artificiels tombait exactement sur la partie inférieure du cercle, on jugeait le Soleil dans l'équateur ; on avait le moment de l'équinoxe et la comparaison des deux équinoxes éloignés donnait la longueur de l'année tropique ; on avait trouvé $365^j \frac{1}{4}$ ou $365^j, 6^h$.

La connaissance du mouvement du Soleil en longitude à partir du point vernal permettait aux anciens (qui n'avaient pas d'instruments convenables pour la mesure du temps et celle de la différence des Æ) de déterminer les longitudes de quelques belles étoiles voisines de l'écliptique vers le lever et le coucher du soleil ; il suffisait de comparer les étoiles au soleil. On généralisait cette méthode dans le cas d'une étoile éloignée du soleil mais supposée toujours voisine de l'écliptique, en comparant le soleil avec la Lune quand ils étaient l'un et l'autre sur l'horizon (la lune s'écarte peu de l'écliptique) et en comparant ensuite la Lune avec l'étoile quand le Soleil était couché. Tycho-Brahé eut l'idée de se servir de Vénus comme astre intermédiaire, dans les temps où elle brillait assez pour être aperçue de jour.

On comprend par ce qui précède comment les anciens avaient été amenés à la considération du système de coordonnées uranographiques dans lequel le plan fondamental est celui de l'écliptique.

11 - Système de coordonnées écliptiques - Longitudes et latitudes célestes -

Les deux coordonnées longitude L et latitude célestes β sont les analogues de l'ascension droite et de la déclinaison complément de la distance polaire



Soit M un point de la sphère céleste ; l'arc de grand cercle MA étant abaissé de M sur l'équateur, on a en γA et en MA les arcs correspondants aux deux coordonnées AR et 90°-δ.

De même, l'arc de grand cercle MB étant abaissé sur l'écliptique on a en γB et en MB les arcs correspondants aux deux coordonnées L et β.

P et Q sont les pôles de l'équateur et de l'écliptique.

Il est préférable de ne pas employer les distances au pôle de l'écliptique (qui correspondraient aux δ) parceque les β qu'on aura à considérer dans le voisinage de l'écliptique sont toujours petits.

Pour trouver les relations entre les deux systèmes de coordonnées il suffit d'envisager le triangle sphérique PQM et d'avoir égard aux règles données pour écrire les formules fondamentales.

Faisons application de ces règles, en nous bornant à la 3e formule.

Veut-on avoir les coordonnées δ, $Æ$ en fonction de βL, c'est δ qu'on projette sur ω; on écrit

$$\delta \cos(90° + Æ) = \omega - (90° - \beta)\cos(90° - L)$$

$$\sin\delta \cos(90° + Æ) = \sin\omega \cos(90° - \beta) - \sin(90° - \beta)\cos\omega \cos(90° - L)$$

$$-\sin\delta \sin Æ = \sin\omega \sin\beta - \cos\omega \cos\beta \sin L.$$

Veut-on avoir les coordonnées βL en fonction de $\delta Æ$, c'est $90° - \beta$ qu'on projette sur ω

$$(90° - \beta)\cos(90° - L) = \omega - \delta \cos(90° + Æ)$$

$$\sin(90° - \beta)\cos(90° - L) = \sin\omega \cos\delta - \sin\delta \cos\omega \cos(90° + Æ)$$

$$\cos\beta \sin L = \sin\omega \cos\delta + \sin\delta \cos\omega \sin Æ.$$

12 - Année sidérale - Changement de la longitude des étoiles - Précession des équinoxes - L'année tropique est celle qui détermine le retour des saisons. D'après ce qui a été dit plus haut sur la comparaison de la position en longitude des étoiles et du soleil, les anciens avaient été amenés à considérer aussi l'année sidérale ou le retour du Soleil à la même étoile. Hipparque reconnut alors que les longitudes des étoiles par rapport aux équinoxes étaient plus grandes que deux siècles auparavant, au temps d'Aristille et de Timocharis, tandis que les latitudes étaient restées sensiblement constantes.

Ce phénomène qu'Hipparque attribuait à une rotation très lente de la sphère céleste autour de la normale à l'écliptique fut pour Copernic la conséquence naturelle d'un lent déplacement de l'axe de rotation de la Terre faisant rétrograder le point γ sur l'écliptique et avançant par suite le moment de l'équinoxe; c'est la précession des Équinoxes. L'augmentation

de la longitude des étoiles, de 50" environ par an, exige que l'année sidérale soit un peu plus longue que l'année tropique, du temps nécessaire pour parcourir 50", c'est-à-dire

$$1440^{min} \times \frac{50''}{1^\circ} = 1440^{min} \times \frac{50''}{3600} = 20 \text{ minutes (environ)}$$

Il a fallu attendre jusqu'à D'Alembert pour avoir une théorie complète de la précession des équinoxes.

13. De la mesure du temps au moyen du Soleil. Temps vrai. Ascension droite du soleil en fonction du temps. Equation du temps. Temps moyen. Le Soleil a été pris dans tous les siècles et chez tous les peuples pour mesurer le temps; les jours marqués par ses apparitions ont été les premières portions du temps qu'on ait entrepris de compter. Dans la suite, les années ont servi pour compter les grands intervalles de temps, et les heures pour subdiviser les jours et exprimer les petits intervalles de temps.

Les anciens astronomes n'avaient d'autre moyen pour déterminer l'heure et le moment d'une observation que de mesurer la hauteur du Soleil pour en conclure sa distance au méridien c'est-à-dire son angle horaire, ou d'observer cette distance au méridien par des alidades qui tournaient dans l'équateur et formaient un équatorial primitif.

D'après cela, les anciens astronomes rapportaient les heures des observations au temps défini comme l'angle horaire du Soleil compté à partir du méridien et évalué en temps, ce qu'on appelle le temps vrai (chapitre I, n° 14). En l'absence d'instruments convenables, pour la mesure du temps, marchant uniformément comme les horloges, ils n'employaient pas d'autre espèce de temps, bien qu'ils possédassent les principes nécessaires pour passer du temps vrai au temps appelé moyen, comme on va l'expliquer.

On a vu (ce chapitre n° 8) que l'Æ du Soleil est liée à la longitude L par la formule

$$\tan \mathcal{R} = \cos \omega \operatorname{tg} L ;$$

Si l'on écrit

$$\tan \mathcal{R} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2}} \operatorname{tg} L ,$$

le développement en série de Lagrange donne

$$\mathcal{R} = L - tg^2 \frac{1}{2} \omega . \sin 2L + \frac{1}{2} tg^4 \frac{1}{2} \omega . \sin 4L - \ldots$$

les termes qui suivent L constituent ce qu'on appelle la réduction à l'équateur.

On a

$$\omega = 23°30' \text{ environ}, \frac{1}{2}\omega = 11°45', tg^2 \frac{1}{2}\omega = \frac{1}{25}$$

les termes en $tg^4 \frac{1}{2} \omega$, $tg^6 \frac{1}{2}$ sont laissés ici de côté comme très petits vis-à-vis $tg^2 \frac{1}{2} \omega$.

On écrit simplement

$$\mathcal{R} = L - tg^2 \frac{1}{2} \omega . \sin 2L .$$

On a donné d'autre part (ce chapitre n° 8) l'expression de la longitude L du soleil due à Hipparque. En l'exprimant en arc, on peut écrire

$$L = L_0 + nt + 2e \sin(L_0 + nt - \varpi);$$

on a posé

$$2e = \frac{1°56}{3438'} = \frac{1}{30}, \quad \varpi = 280°;$$

le terme qui suit $L_0 + nt$ constitue ce qu'on appelle l'équation du centre.

Remplaçant L par cette valeur dans l'expression de $\mathcal{R}$ et ne conservant que les termes principaux, il vient

$$\mathcal{R} = L_0 + nt + 2e \sin(L_0 + nt - \varpi) - tg^2 \frac{1}{2} \omega \sin 2(L_0 + nt).$$

Si l'on imagine dans le plan de l'équateur céleste un astre fictif ayant pour ascension droite

$$\mathcal{R}_m = L_0 + nt$$

on voit que cet astre fictif, employé pour compter le temps donnera des heures peu différentes de celles du Soleil, à cause de la petitesse des termes en $2e$ et $tg^2 \frac{1}{2} \omega$. On appelle temps moyen le temps défini par l'angle horaire de ce soleil fictif. La différence

temps moyen moins temps vrai s'appelle l'équation du temps. Au moment du passage du Soleil vrai et du Soleil moyen par le méridien, il est midi vrai ou midi moyen, la différence des heures de deux passages consécutifs représente soit le jour vrai soit le jour moyen.

Soient, au même instant $\mathcal{R}_\odot$ et $AH_\odot$, $\mathcal{R}_m$ et AH_m les ascensions droites et angles horaires du soleil et de l'astre fictif, à cause de la relation

$$\mathcal{R}_\odot + AH_\odot = \mathcal{R}_m + AH_m = H \text{ sidérale},$$

il vient

$$\text{Équation du temps} = AH_m - AH_\odot = \mathcal{R}_\odot - \mathcal{R}_m,$$

les différences $AH_m - AH_\odot$, $\mathcal{R}_\odot - \mathcal{R}_m$ étant évaluées en temps.

On aura donc d'après l'expression obtenue pour $\mathcal{R}$, en arc

$$\text{Équation du temps en minutes de temps} = \frac{3438'}{15}\left[2e\sin(L_0+nt-\varpi) - tg^2\frac{1}{2}\omega\sin 2(L_0+nt)\right]$$

L'équation du temps permet de passer du temps vrai au temps moyen ou inversement.

14 – Discussion sommaire de l'équation du temps – Elle est représentée par l'expression

$$\frac{3438'}{15}\left[2e\sin(L_0+nt-\varpi) - tg^2\frac{1}{2}\omega\sin 2(L_0+nt)\right]$$

on a

$$2e = \frac{1}{30},\ tg^2\frac{1}{2}\omega = \frac{1}{25},\ \varpi = 280°;$$

donc

$$\frac{3438'}{15}\left[\frac{1}{30}\sin(L_0+nt-\varpi) - \frac{1}{25}\sin 2(L_0+nt)\right]$$

ϖ n'est pas bien différent de $270°$ et $\frac{1}{25}$ de $\frac{1}{30}$, la partie principale de l'équation du temps peut donc être prise égale à

$$\frac{3438'}{15\times 25}\left[\sin(L_0+nt-270) - \sin 2(L_0+nt)\right]$$

$$\frac{3438}{15\times 25}\left[\cos(L_0+nt) - \sin 2(L_0+nt)\right] = \frac{3438}{15\times 25}\cos(L_0+nt)\left[1-2\sin(L_0+nt)\right]$$

Il résulte de là que la partie principale de l'équation du temps, positive à l'équinoxe, devient nulle quand

$$\cos(L_0 + nt) = 0$$ c'est-à-dire vers les deux solstices

et quand

$$1 - 2\sin(L_0 + nt) = 0,$$

d'où

$$L_0 + nt = 30° \text{ ou } L_0 + nt = 180° - 30°$$

c'est-à-dire un mois après l'équinoxe de printemps ou un mois avant celui d'Automne.

La valeur maximum de l'équation du temps est voisine d'un quart d'heure, 17 minutes.

15 - Le jour solaire moyen unité de temps - Longueur de l'année tropique en jours solaires moyens - Relation entre le jour solaire moyen et le jour sidéral -

La considération d'un astre fictif animé d'un mouvement uniforme dans le plan de l'équateur céleste conduit à la notion du jour solaire moyen, intervalle de temps compris entre deux passages successifs de l'astre au méridien. Cet intervalle constant peut être pris pour unité de temps.(1)

D'après ce qui a été dit de l'équation du temps, le jour solaire moyen peut être également défini comme étant la moyenne d'un grand nombre de jours solaires vrais et la longueur moyenne de l'année tropique, déduite de deux équinoxes séparés par un grand nombre d'années est l'intervalle de deux passages consécutifs de l'astre fictif par le point γ. On a trouvé pour sa valeur 366,2422 jours sidéraux.

Il importe de rapprocher l'unité empruntée au mouvement du Soleil de l'unité tirée du mouvement diurne du point γ, le jour sidéral.

Le rapport entre les deux unités est donné par la relation suivante.

366,2422 (Jours sidéraux) = 365,2422 (Jours solaires moyens)

Pour le montrer, considérons le méridien terrestre qui contient, au moment de l'équinoxe du printemps, le point γ; ce méridien passera par une certaine station, suivons les passages successifs à ce méridien du point γ et de l'astre fictif dont le cercle de déclinaison reste voisin du Soleil vrai.

---

(1) C'est l'unité adoptée dans les théories astronomiques.

Si l'année tropique était exactement de 366 jours sidéraux, le point γ revenant au méridien 366 fois exactement, l'astre fictif, au bout de l'année tropique ayant fait exactement une fois de moins le tour du ciel reviendrait au méridien une fois de moins exactement; il y aurait exactement

$$366 - 1 = 365 \text{ jours solaires moyens}$$

Si l'année tropique était non plus de 366 jours sidéraux, mais de $366^j,2$ l'astre fictif au bout de 10 années tropiques ou de 3662 jours sidéraux, ayant fait exactement 10 fois de moins le tour du ciel reviendrait au méridien 10 fois en moins exactement; il y aurait donc dans l'intervalle exactement

$$3662 - 10 = 3652 \text{ jours solaires moyens}$$

et ainsi de suite. Donc 366.2422 jours sidéraux = 365,2422 jours solaires moyens.

L'année tropique est de 365,2422 jours solaires moyens.

A l'équinoxe de printemps le soleil est en γ, la différence temps sidéral – temps solaire est donc nulle; elle augmente ensuite à raison de 4^m par jour, 2 heures par mois, pour atteindre 24 heures après l'année écoulée.

16 – Calendrier – Il a pour objet la division du temps en périodes au moyen desquelles on puisse fixer l'époque d'un évènement.

Il est essentiel de choisir un système qui maintienne en concordance l'ordre des saisons et les dates du Calendrier.

Si la durée de l'année tropique était d'un nombre exact de jours solaires moyens, il suffirait d'adopter ce nombre de jours comme période fondamentale pour la division du temps; chaque saison reviendrait à la même date.

La longueur de l'année tropique est égale à

$$365^j,2422 \text{ (jours solaires moyens)}$$
$$= 365^j,25 - 0^j,0078$$
$$= 365^j, + \frac{1}{4} \text{ jour} - \frac{3}{400} \text{ jour}$$
$$= 365^j, + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} \text{ jour} + \frac{1}{400} \text{ jour}$$

en remplaçant $0^j,0078$ par $0^j,0075$.

Pour satisfaire à la condition énoncée, en négligeant les fractions $\frac{1}{100}$ et $\frac{1}{400}$, il suffit, sur 4 années consécutives d'en prendre 3 de 365 jours et une de 366 jours, qu'on appelle bissextile, de là la règle du Calendrier julien (45 ans avant J.C) de prendre comme bissextiles les années dont le millésime est divisible par 4. Le jour est ajouté au mois de février.

Mais, comme on a négligé les fractions, on a une année trop longue.

Pour rétablir l'accord, sur quatre années séculaires consécutives comme 1600, 1700, 1800, 1900 qui devraient être toutes quatre bissextiles, celle dont le millésime abstraction faite des deux zéros est divisible par 4, est seule prise pour bissextile. On tient compte ainsi des deux termes correctifs.

C'est en cela que consiste la réforme grégorienne.

L'équinoxe de printemps qui arrivait le 21 Mars en l'année 325 (époque du Concile de Nicée) arrivait le 11 Mars en 1582, de sorte que l'époque du phénomène céleste précédait de 10 jours la date marquée toujours au 21 Mars sur les Calendriers. La célébration de la fête de Pâques devant avoir lieu, d'après les décisions du Concile de Nicée le dimanche dans la pleine Lune qui suit l'équinoxe de printemps, on était donc exposé à les méconnaître en continuant à se servir de l'ancien Calendrier.

Le pape Grégoire XIII, résolut vers 1580, de remédier à ces inconvénients, et, après avoir pris l'avis d'un Conseil de mathématiciens et d'Astronomes, il décida;

1° que pour corriger les erreurs accumulées depuis l'année 325, le 5 Octobre de l'année 1582 serait appelé le 15 Octobre.

2° Que la règle indiquée ci-dessus pour tenir compte de la véritable longueur de l'année serait suivie.

Le Calendrier grégorien, introduit en 1582 dans les États romains et adopté aussitôt dans tous les pays catholiques ne l'a été que successivement et beaucoup plus tard chez les nations protestantes.

Aujourd'hui la Russie et la Grèce sont les seules contrées de l'Europe où l'on ait conservé l'ancien Calendrier ou le vieux style suivant l'expression usitée. La différence des dates dans le vieux et le nouveau style est actuellement de 13 jours.

17. Cadran solaire. Aujourd'hui, le temps vrai est seulement employé par les marins qui se servent du Soleil pour leurs observations. Le temps vrai a été en usage dans la vie civile jusqu'en 1816. Un cadran solaire permet de déterminer le temps vrai et si l'on veut le temps moyen en tenant compte de l'équation du temps. Leur utilité est toujours grande lorsqu'on se trouve sans communication aisée avec les lignes de chemin de fer et les lignes télégraphiques

Un cadran se compose essentiellement d'une flèche en métal scellée dans un mur parallèlement à l'axe du monde et portant ombre sur le mur lorsque le Soleil tombe sur elle. Imaginons par cette tige ou style des plans formant entre eux des angles de 15° ou 1 heure en temps, de part et d'autre du plan méridien du lieu. D'heure en heure, le soleil se trouvera dans chacun de ces plans et l'ombre du style coïncidera successivement avec leurs traces sur le mur. On aura ainsi l'heure solaire vraie.

Le style pour être parallèle à l'axe du monde doit être situé dans le méridien du lieu et faire avec la verticale un angle égal à la colatitude λ du lieu.

Le tracé des lignes s'effectue par les méthodes de la Géométrie descriptive.

On trouve quelque fois autour de la ligne de midi une courbe en forme de 8 très allongé. C'est le lieu des extrémités de l'ombre du style à midi moyen, d'un bout à l'autre de l'année. On construit aisément cette courbe point par point connaissant les valeurs de l'équation du temps pour chaque jour de l'année: la courbe est une représentation graphique de l'équation du temps.

Cadran pour un mur perpendiculaire au Méridien.

Cadran pour un mur oblique au Méridien.

18. Horloges et chronomètres - Leur avantage est de donner des indications continues et précises. Ils sont réglés soit sur le temps solaire moyen soit sur le temps sidéral (quand ils doivent servir exclusivement dans les observatoires).

Tout mouvement suppose un moteur et, pour qu'il soit régulier, il faut un régulateur.

Le mouvement supposé régulier est transmis aux aiguilles au moyen d'un système de roues dentées constituant le rouage ; c'est sur l'une des roues que le régulateur exerce son action.

Comme le mouvement doit être entretenu, il faut un mécanisme (système de remontage) pour remonter l'instrument sans altérer son mouvement actuel.

Ces quatre parties se trouvent dans les instruments fixes, horloges, comme dans les instruments transportables, chronomètres et montres de marine ; mais le moteur et le régulateur y sont différents ; il y a un poids moteur dans les horloges, un ressort dans les chronomètres.

C'est à Huygens, au XVII[e] siècle que l'on doit les principes de l'horlogerie de précision. Il prit le pendule (Galilée avait découvert l'isochronisme des oscillations) comme régulateur des horloges, et le ressort spiral comme régulateur des montres.

19 - La pièce la plus importante est le Régulateur.

Dans les horloges, le régulateur est un pendule qui par l'intermédiaire d'un mécanisme appelé échappement communique un mouvement régulier au rouage et en même temps reçoit par l'échappement une petite impulsion destinée à entretenir le mouvement (Renvoi aux livres spéciaux pour les descriptions).

Le régulateur est un pendule composé, la durée d'oscillation est donnée (dans le vide) par la formule

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16} + \cdots\right),$$

g accélération due à la pesanteur

l longueur du pendule simple synchrone au pendule composé ;

$$l = a + \frac{K^2}{a},$$

a distance du Centre d'oscillation au centre de gravité,
K rayon de giration du système par rapport à un axe passant par le centre de gravité et parallèle à l'axe de suspension.
α Amplitude des oscillations.

Il faut que T reste constant, malgré les variations de température et de pression, en supposant l'échappement tel que α ne varie pas.

Le facteur le plus important l, qui dépend de a, est rendu constant par la compensation du balancier (suspension à gril ...) ; mais il est impossible de rendre K constant ; on n'obtient qu'une compensation approchée. La meilleure solution consiste à mettre la pendule dans une pièce à température constante.

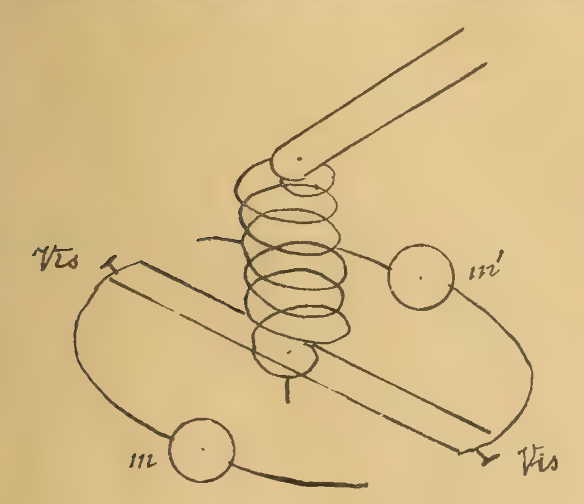
La pression atmosphérique a aussi une influence notable. On a imaginé des dispositifs tels que $\frac{l}{g}$ ne varie pas avec la pression.

Il y a encore comme causes de variation le degré de fluidité des huiles, le degré d'humidité de l'air . . .

20. Chronomètres.

Le régulateur du chronomètre est formé d'une sorte de volant appelé balancier, pouvant osciller autour de son axe sous l'influence d'un ressort en acier ou en palladium, contourné en hélice et appelé spiral. Une de ses extrémités s'attache au bâti du chronomètre, l'autre à l'axe du balancier.

Pierre le Roy, un des créateurs de l'horlogerie de précision, a montré que les oscillations d'un ressort spiral de longueur convenable, sont isochrones à petites ou grandes amplitudes (à température constante) comme pour le pendule.



M. Phillips a montré qu'on pouvait arriver au même résultat en donnant une forme appropriée aux courbes terminales du spiral.

La durée d'oscillation est donnée par la formule

$$T = \pi \sqrt{\frac{lI}{E}} \quad \text{(Phillips)}$$

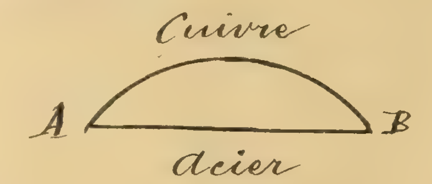
I moment d'inertie du balancier.
l longueur du spiral mesurée sur l'hélice.
E dépend des dimensions de la section du fil dont est formé le spiral et de son coefficient d'élasticité.

Quand la température varie, les trois facteurs dans $\frac{lI}{E}$ varient; si par exemple, elle croit, l augmente E diminue.

Si le balancier était un simple volant, homogène, I augmenterait; il en résulterait une forte variation (de 10^s environ par degré de température).

On emploie un balancier compensateur formé de lames bimétalliques et portant deux masses m, m' et des vis de réglage de sorte que le balancier se rétrécisse par l'action de la chaleur.

En prenant, par exemple, la lame intérieure en acier et la lame extérieure en cuivre



la lame de cuivre qui se dilate davantage avec la température que la lame d'acier, agira pour augmenter la courbure de la lame bimétallique et le balancier se rapprochera de l'axe.

On règle le balancier pour qu'à deux températures, 0° et 30° par exemple, on obtienne l'égalité de durée des oscillations. On n'a pu obtenir jusqu'ici que le réglage subsiste pour les températures intermédiaires (erreur secondaire de compensation) cette erreur est représentée par une formule empirique à trois termes telle que

$$\text{erreur secondaire} = a + b\theta + c\theta^2 \qquad \theta \text{ température}$$

Il est très important pour les chronomètres de marine de noter la température afin de tenir compte de cette correction mise en évidence par l'ingénieur hydrographe Lieussou.

21. Correction et marche des horloges et des chronomètres _ La correction pour une époque déterminée est ce qu'il faut ajouter à l'heure marquée pour avoir l'heure exacte. Cette correction se déduit d'observations astronomiques.

La marche d'un instrument est le nombre de secondes dont il avance ou retarde par jour.

22 – Système de remontage – Il faut qu'une force agisse pendant le remontage, c'est par exemple la tension d'un ressort auxiliaire.

23. Chronographe – Avant l'intervention de l'électricité la règle était de noter le temps et d'observer comme ont dit « à l'œil et à l'oreille ».

L'observateur, la pendule à côté de lui, entendait les battements de la seconde, et il estimait avec toute la précision possible, en secondes et dixièmes de secondes, le moment de la production du phénomène attendu, le moment par exemple d'une occultation d'étoile. A présent, l'instant du phénomène est souvent enregistré en pressant un bouton à portée de la main, ce qui établit un circuit électrique et produit une marque sur une bande de papier qu'un mécanisme d'horlogerie fait mouvoir d'un mouvement uniforme; les battements de la pendule ou du chronomètre sont enregistrés en même temps sur une bande de papier

• top répondant à l'observation

. . . . . . secondes de la pendule

L'avantage est que l'observateur est débarassé du souci de compter la seconde. La précision obtenue n'est guère plus grande.

Chapitre V.

Détermination astronomique de l'heure et des coordonnées terrestres ou géographiques d'une station. Détermination des coordonnées uranographiques d'un astre.

1\. Fondement de la géographie. Liaison entre les deux problèmes géographique et uranographique.

La géographie suppose la distinction de différents points de la surface de la terre; en d'autres termes la détermination des coordonnées d'une station. D'un autre côté la détermination des coordonnées uranographiques des astres en fonction du temps est le fondement de toutes les recherches astronomiques.

Supposons la terre sphérique, ce qui est à peu près le cas, puisque dans un ellipsoïde de révolution semblable à la terre et de rayon moyen égal à 1 mètre il y aurait seulement une différence de 3 millimètres entre le plus grand et le plus petit rayon.

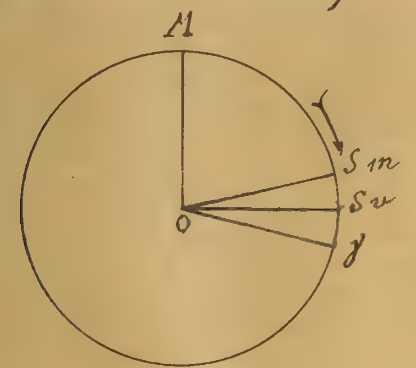
Si la sphère céleste ne tournait pas, chaque point de la terre aurait à son zénith un point de la sphère céleste qui lui correspondrait. la détermination des coordonnées des stations reviendrait à celle des coordonnées des points de la sphère céleste. Le problème de la navigation serait facile.

La sphère céleste tourne; la trace du zénith d'une station décrit alors un parallèle de la sphère céleste, répondant à une distance polaire déterminée; les zéniths des différents points du parallèle terrestre décrivent le même parallèle céleste. A chaque parallèle terrestre correspond donc un parallèle céleste.

La distinction entre deux points du parallèle terrestre résulte de l'angle compris à un instant donné entre les plans méridiens des deux lieux.

2 - Résumé des notions concernant les différentes espèces de temps - Importance des observations du Soleil - Les observations des voyageurs et des marins, qui ne disposent que de petits instruments, se rapportent surtout au Soleil. Il est utile de résumer les notions relatives au Soleil.

Les angles horaires du Soleil vrai et du Soleil moyen définissent le temps solaire vrai et le temps solaire moyen.



Considérons la sphère céleste et l'observateur placé sur l'axe du monde la tête du côté du pôle boréal.

Marquons sur l'équateur céleste, à un moment donné le point γ, l'intersection Sv du cercle de déclinaison du Soleil avec l'équateur céleste, et la position de l'astre fictif Sm, que les Astronomes imaginent à côté de Sv, et font mouvoir dans le même sens que Sv, avec la vitesse moyenne de Sv, de sorte que Sm fasse le tour complet dans l'intervalle égal à la moyenne des jours solaires vrais, ~~intervalle égal à la moyenne des jours vrais~~, intervalle appelé jour solaire moyen.

Soit enfin OM la trace du plan méridien du lieu.

Par l'effet du mouvement diurne, les points γ, Sv, Sm tournent autour de O dans le sens rétrograde; les angles horaires γOM, S_vOM, S_mOM augmentent constamment depuis 0°, quand l'un des points passe au méridien, à 360° quand ce point y revient, ou de 0^h à 24^h, à raison de 1^h pour 15° d'angle.

Cela posé, au moment considéré, dans le lieu donné,

l'heure sidérale = l'angle γOM transformé en temps.

l'heure vraie = l'angle S_vOM transformé en temps.

l'heure moyenne = l'angle S_mOM transformé en temps.

L'angle S_vOS_m, transformé en temps, représente ce qu'il faut ajouter ou retrancher à l'heure vraie pour avoir l'heure moyenne; c'est l'équation du temps, qui ne dépasse guère un quart d'heure en valeur absolue.

On écrit

$$H\ moy. = H_{\odot} + \text{Equ. du temps}.$$

3. Usage des différentes espèces de temps. Connaissance des temps.

Le temps sidéral qui concorde avec le temps moyen à l'équinoxe de printemps et augmente ensuite de 4^m par jour est exclusivement employé par les Astronomes. Le temps solaire moyen est employé dans la vie civile. Jusqu'en 1816, à Paris, on se réglait sur le temps vrai, que font connaître les cadrans solaires.

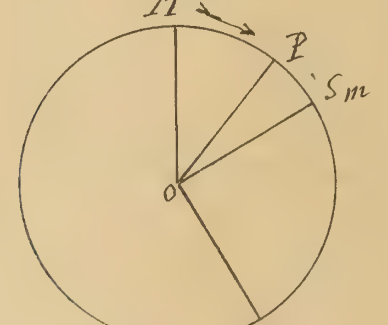
Les horloges et les chronomètres ne peuvent fournir le temps vrai, qui n'est pas uniforme, mais le temps moyen.(1)

Le temps vrai et l'équation du temps, pour passer du temps vrai au temps moyen, sont continuellement utilisés par les voyageurs et les marins qui observent surtout le Soleil et emploient des chronomètres marquant le temps moyen.

Il suffit pour le moment de savoir que tous les nombres utiles se trouvent dans la Connaissance des Temps recueil publié chaque année par le Bureau des Longitudes.

4. Coordonnées géographiques d'une station. Colatitude. Longitude.

Il y a d'abord la colatitude ou la distance du zénith au pôle, ensuite la longitude relativement à un point pris pour origine. La détermination de la colatitude revient à celle de la distance zénithale Zm d'un astre connu E dans le méridien; on a en effet



$$Zm = \delta - \lambda, \text{ d'où } \lambda = \delta - Zm$$

La longitude est l'angle compté dans le sens direct, que font entre eux les méridiens des deux stations, OM et OP étant les traces des méridiens des deux stations sur le plan de l'équateur céleste, l'angle MOP est la longitude de la station M relativement à la station P, c'est encore en temps, la différence des heures sidérales ou moyennes marquées

---

(1) les Astronomes font commencer le jour moyen astronomique à midi; le jour civil commence à minuit, 12 heures avant le jour moyen des Astronomes.

par les horloges ou chronomètres dans les deux stations.

Ainsi la détermination de la longitude revient à la détermination de l'heure. On a

Longitude L (en temps) = Heure du lieu − Heure de Paris.

D'après les deux formules

$$H_* = Ꝛ + AH$$

$$H\ moy = AH_{\odot} + \text{Equ. du temps},$$

la détermination de l'heure se ramène elle-même à la détermination de l'angle horaire d'un astre connu.

L'origine des longitudes est Paris pour la France, Greenwich pour l'Angleterre et pour la plupart des pays du continent. (Congrès de Washington, en 1884, pour l'unification des longitudes).

Il convient de remarquer que les définitions des coordonnées λ et L sont indépendantes de toute supposition sur la forme de la terre, qui sera déterminée en effet d'après les valeurs de ces coordonnées.

5. Conditions favorables pour la détermination soit de l'heure soit de la colatitude par des observations de distances zénithales.

Le plus souvent, on détermine la colatitude et l'heure ou ce qui revient au même d'après les formules

$$H_* = Ꝛ + AH,$$

$$H\ moy = AH_{\odot} + \text{Equ. temps},$$

l'angle horaire AH, à l'aide d'observations de distances zénithales d'astres bien connus par leurs coordonnées Ꝛ et δ.

On est censé avoir des valeurs approchées des inconnues, et la question est d'avoir des valeurs plus précises.

Le triangle de position : pôle, zénith, astre, donne

$$\cos z = \cos\lambda\cos\delta + \sin\lambda\sin\delta\cos AH$$
$$\sin z\sin A = \sin\delta\sin AH$$
$$\sin z\cos A = -\sin\lambda\cos\delta + \sin\delta\cos\lambda\cos AH\ ;$$

Il est d'abord clair qu'une observation unique de distance zénithale ne donnant qu'une seule relation entre les inconnues λ et AH est insuffisante, en principe, pour déterminer soit λ, soit AH.

Toutefois si l'on peut disposer des circonstances des observations, et si elles sont telles que H par exemple, fonction de λ et z étant représenté par une surface, on se trouve dans le voisinage d'un point où le plan tangent est perpendiculaire à l'axe des H, on aura une valeur très approchée de l'inconnue

Le calcul conduit au même résultat. Soient

$$\lambda, z, \text{ d'où l'on déduit } H,$$

et

$$\lambda + d\lambda, z + dz, \text{ d'où l'on déduit } H + dH,$$

les valeurs approchées et corrigées des différentes quantités, $d\lambda$, dz ... étant de petites corrections que nous traiterons comme des différentielles en négligeant les carrés et les produits, on a

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right) d\lambda + \left(\frac{\partial H}{\partial z}\right) dz + \dots$$

En général il faudrait connaître $d\lambda$, dz pour calculer dH; mais si les circonstances sont telles que les coëfficients de $d\lambda$ et dz sont nuls ou très petits, il devient inutile de calculer dH.

En différentiant la première des relations fondamentales par rapport à z, λ, H il vient

$$-\sin z \, dz = (-\sin\lambda \cos\delta + \sin\delta \cos\lambda \cos H)\, d\lambda$$
$$- \sin\lambda \sin\delta \sin H \, dH$$

et, en ayant égard aux deux autres relations,

$$-\sin z \, dz = +\sin z \cos A \, d\lambda - \sin\lambda \sin z \sin A \, dH$$

$$dz = -\cos A \, d\lambda + \sin\lambda \sin A \, dH$$

Si l'on veut déterminer l'heure, ce qui revient à déterminer H, on résout la relation par rapport à dH

$$dH = \frac{d\lambda}{\sin\lambda \, \mathrm{tg} A} + \frac{dz}{\sin\lambda \sin A}$$

Dans un lieu de colatitude λ approximativement connue, l'erreur sur λ disparaîtra si $\mathrm{tg}\, A$ est très grand ou A voisin de $90°$; si l'azimut de l'astre est presque perpendiculaire au méridien. L'erreur sur z sera aussi affaiblie.

Si l'on veut déterminer la colatitude, on écrit

$$d\lambda = \sin\lambda \, \mathrm{tg} A \, dH - \frac{dz}{\cos A}.$$

L'erreur sur $\mathcal{H}$ sera insensible pour de petites valeurs de A, c'est-à-dire si les observations sont faites près du méridien. L'erreur sur z sera aussi affaiblie.

6. Détermination de l'heure et de la longitude d'une station. Conformément aux conclusions précédentes, on observe, dans un azimut perpendiculaire au méridien la distance zénithale d'un astre, on la corrige de la réfraction et de la parallaxe, s'il y a lieu. La première des relations entre les coordonnées zénithales et les coordonnées locales donne

$$\cos z = \cos \lambda \cos \delta + \sin \lambda \sin \delta \cos \mathcal{H}$$

d'où l'on tire $\cos \mathcal{H}$ et

$$tg \frac{\mathcal{H}}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-\lambda)\sin(s-\delta)}{\sin s \sin(s-z)}}$$

$$2s = \lambda + \delta + z$$

Ayant l'angle horaire de l'astre, étoile ou soleil, on en déduira l'heure par les formules respectives

$$H_{*} = \mathcal{R} + \mathcal{H} \text{ (pour les étoiles)}$$

$$H \text{ moyenne} = \mathcal{H}_{\odot} + \text{Equ. du temps (Soleil)}$$

La différence entre l'heure calculée et l'heure notée de l'observation donnera la longitude du lieu par rapport à Paris si le chronomètre est réglé sur l'heure de Paris.

Dans la pratique, par exemple à bord des navires, plusieurs chronomètres transportent, comme on dit, l'heure du méridien origine. La régularité de la marche des chronomètres est même mieux assurée sur mer que sur terre. Mais il faut tenir compte de l'erreur secondaire de compensation dépendant de la température.

Grâce aux progrès réalisés dans la construction des chronomètres, cette méthode donne de bons résultats quand on ne reste pas plus d'un mois sans toucher terre

7. Détermination de la colatitude d'une station au moyen de distances zénithales prises dans le voisinage du méridien.

Appelons z_m la distance zénithale de l'astre qu'on obtiendrait en la mesurant dans le méridien lui-même, on aura

$$\delta - \lambda = z_m ;$$

il suffit de connaître z_m pour avoir λ.

D'après ce qui a été dit des conditions favorables, une observation faite dans le voisinage du méridien donne une valeur très approchée de λ ; mais on peut avoir une formule plus exacte sans compliquer trop les choses.

Soit z une des distances zénithales observées à des heures déterminées du chronomètre et corrigées, de la réfraction et de la parallaxe ; elle sera peu différente de z_m ; on aura

$$z = z_m + x\,, \quad x \text{ quantité petite}$$

Portant cette valeur de z dans la première des relations

$$\cos z = \cos\delta\cos\lambda + \sin\delta\sin\lambda\cos AH,$$

il vient

$$\cos z_m \cos x - \sin z_m \sin x = \cos\delta\cos\lambda + \sin\delta\sin\lambda\cos AH,$$

et, en ne regardant que les termes du premier degré en x et remarquant que

$$\cos z_m = \cos(\delta - \lambda)$$

$$x = z - z_m = \frac{(1-\cos AH)\sin\delta\sin\lambda}{\sin z_m} = \frac{2\sin\lambda\sin\delta\sin^2\frac{AH}{2}}{\sin z_m}\,;$$

On peut remplacer z_m par z au dénominateur.

Pour calculer le second membre, la valeur approchée de λ suffit ; on déduit AH des formules respectives

$$H_{*} = Æ + AH \text{ (étoiles)}$$

$$H \text{ moyenne} = AH_{\odot} + \text{Équ. du temps (Soleil)}$$

S'il s'agit en particulier des observations du Soleil, la dernière relation donnera

$$AH_{\odot} = H\text{ moy.} - \text{Équ. du temps}$$

et l'on doit prendre

$$H\text{ moy.} = H_{\text{Paris}} \text{ (donnée par le chronomètre)} + \text{Longitude } L \text{ du lieu.}$$

x étant connu, on peut déduire z_m de la relation

$$z_m = z - x$$

et ensuite λ de

$$\lambda = \delta - z_m$$

On fera concourir au résultat les diverses observations de distance zénithale.

8. Détermination de la direction du méridien par l'observation de l'azimut d'un astre.

Supposons que l'on ait visé l'astre à une heure connue du chronomètre ; que u soit la division du cercle azimutal, que les divisions aillent en croissant avec les azimuts.

L'azimut A peut se calculer d'autre part avec les deux dernières des trois relations fondamentales

$$\frac{\sin z \cos A}{\sin z \sin A} = \frac{-\sin \lambda \cos \delta + \sin \delta \cos \lambda \cos AH}{\sin \delta \sin AH}$$

$$\cot g A \sin \delta \sin AH = -\sin \lambda \cos \delta + \sin \delta \cos \lambda \cos AH$$

$u - A$ sera la division à laquelle répondra le méridien, et si l'on amène l'alidade sur cette division, la lunette du cercle azimutal, en tournant autour de son axe horizontal, décrira le méridien.

Pour apprécier les conditions favorables, différentions l'équation trouvée par rapport à A, λ, AH :

$$-\sin \delta \sin AH \frac{dA}{\sin^2 A} + \cot g A \sin \delta \cos AH \, dAH =$$
$$-(\cos \lambda \cos \delta + \sin \delta \sin \lambda \cos AH)\, d\lambda - \sin \delta \cos \lambda \sin AH \, dAH$$

$$0 = -\sin \delta \sin AH \frac{dA}{\sin^2 A} + (\cos \lambda \cos \delta + \sin \lambda \sin \delta \cos AH)\, d\lambda$$
$$+ \frac{\sin \delta}{\sin A}(\cos A \cos AH + \sin A \sin AH \cos \lambda)\, dAH$$

Le coëfficient de $d\lambda = \cos z$.

Le coëfficient de $\frac{\sin \delta}{\sin A} dAH = \cos E$

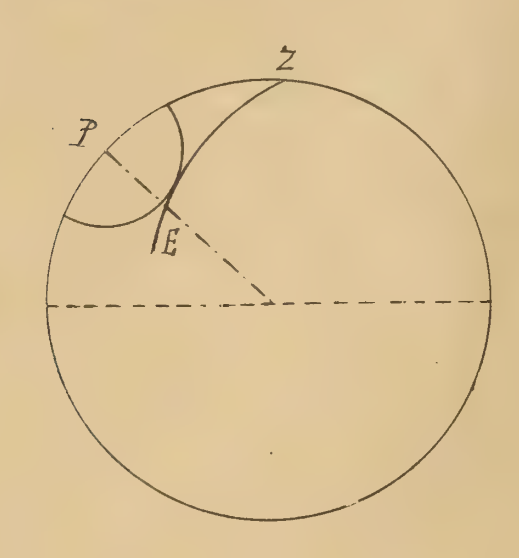
d'après la formule fondamentale de la Trigonométrie appliquée au triangle supplémentaire

En remplaçant $\sin \delta \sin AH$ par $\sin z \sin A$, chassant le dénominateur $\sin A$, il vient

$$-\sin z \, dA + \cos z \sin A \, d\lambda + \sin \delta \cos E \, dAH = 0,$$

$$dA = \cot g z \sin A \, d\lambda + \frac{\sin \delta \cos E}{\sin z} dAH$$

On voit d'abord qu'il faut observer des astres assez loin du zénith.



Si l'on observe une étoile circompolaire, les coëfficients de $d\lambda$ et dA seront affaiblis, celui de dA sera nul au moment de la plus grande digression de la circompolaire, E étant alors le point de contact du parallèle et du vertical tangent.

9. Détermination de la colatitude, de l'heure et de la longitude, de la direction du méridien au moyen des instruments méridiens.

Les méthodes précédentes ont l'avantage de la simplicité. Mais si l'on recherche une grande précision, on fait appel aux instruments méridiens.

La détermination de la colatitude λ s'obtient au moyen de la mesure de distances zénithales méridiennes d'étoiles bien connues, au Sud et au Nord du zénith.

La détermination des longitudes offre plus de difficulté.

Les deux stations dont il s'agit d'avoir la différence de longitude étant supposées réunies par un fil télégraphique, les deux observateurs A et B observent pendant quelques soirées dans les deux stations les passages méridiens d'étoiles bien connues.

Dans le courant de chaque soirée d'observation, à des heures convenues, A et B s'envoient à tour de rôle des signaux télégraphiques pour comparer leurs pendules, c'est-à-dire déterminer la différence des heures marquées à un même moment

Soient H et H' les heures marquées à un même moment;

C_p et C'_p les corrections des deux pendules c'est-à-dire, pour chaque pendule, lors du passage d'une étoile d'ascension droite Æ. Æ (l'heure que la pendule devrait marquer) $-H$ (l'heure marquée) les heures respectives dans les deux stations seront $H+C_p$ et $H'+C'_p$; La comparaison des pendules fait connaître à un moment donné

$$H'-H;$$

la différence de longitude sera d'après la définition même

$$\Delta = H'+C'_p-(H+C_p) = H'-H+C'_p-C_p;$$

On suppose que B est à l'est de A, Δ peut être affecté par la différence des équations personnelles a et b des deux observateurs A et B (Chap. III, n° 22), de sorte que l'on doit prendre

$$\text{Différence de longitude} = \Delta + b - a$$

Après une première série d'observations, les deux observateurs échangent leurs stations ; il vient

$$\text{Différence de longitude} = \Delta' + a - b$$

La moyenne $\frac{\Delta + \Delta'}{2}$ sera affranchie des équations personnelles.

Enfin la direction du méridien s'obtiendra facilement quand on aura déterminé l'erreur a d'azimut de la lunette méridienne (chapitre III, n° 12). On utilisera une mire méridienne.

Quelques méthodes particulières pour avoir la longitude.

10. Usage de la Lune pour retrouver l'heure du méridien origine.

Conserver l'heure du méridien origine est le point difficile dans la détermination des longitudes. La lune peut servir pour cet objet.

Elle se déplace assez rapidement à travers les étoiles ; elle fait le tour de la sphère céleste en un mois environ. La théorie permet de prédire, longtemps à l'avance, le lieu que la Lune vue du centre de la Terre, ou d'un point quelconque de sa surface, occupera sur la sphère céleste relativement aux étoiles.

La Connaissance des Temps renferme toutes les données utiles : Coordonnées uranographiques de la Lune lors de son passage aux méridiens successifs distants de celui de Paris de $1^h, 2^h, \ldots$ distances angulaires de la Lune aux principales étoiles ou aux planètes dont elle s'approche, ... le tout calculé pour le temps moyen de Paris.

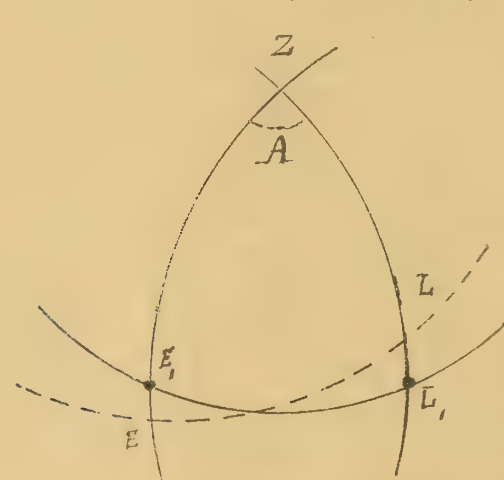
Lorsqu'un observateur situé en un point quelconque du globe a déterminé les coordonnées de la Lune en observant

son passage au méridien de la station qu'il occupe, ou mesuré la distance de la Lune aux étoiles principales ou aux planètes et ramené cette distance à ce qu'elle serait vue du centre de la Terre (en tenant compte de la parallaxe) il peut par une simple interpolation retrouver l'heure de Paris.

De même que la mesure d'un angle horaire $H = f(t)$, permet d'obtenir t, de même la mesure des coordonnées de la Lune ou des distances aux étoiles principales. Cependant le mouvement relatif de la Lune par rapport aux étoiles étant environ 30 fois moins rapide que le mouvement diurne, l'heure du premier méridien sera déterminée avec une incertitude 30 fois plus grande que par la méthode télégraphique dans laquelle on emploie les passages méridiens des étoiles.

11. Réduction d'une distance lunaire au centre de la Terre.

Soient E, L, les positions de l'astre et de la Lune pour l'observateur au centre de la Terre; E_1, L_1, les positions observées à la surface de la Terre;



$E_1L_1 = \Delta$, la distance angulaire apparente mesurée entre l'astre et la Lune, z_1 et z'_1 les distances zénithales des deux astres mesurées au même moment par deux autres observateurs.

Les distances zénithales ZE, ZL, corrigées de la réfraction ρ et de la parallaxe p seront, en supposant la terre sphérique

$$z = z_1 + \rho - p$$

$$z' = z'_1 + \rho' - p'$$

Les parallaxes se calculeront aisément par les formules,

$$p = P \sin(z_1 + \rho),$$

$$p' = P' \sin(z'_1 + \rho'),$$

P et P' étant les parallaxes horizontales de l'astre et de la Lune.

L'angle A au zénith du triangle ZEL ne sera pas altéré, car l'effet de la réfraction combiné avec celui de la parallaxe se borne à déplacer chaque astre dans son vertical ZE ou ZL, et à les reporter en E_1 et en L_1

Cet angle A sera déterminé par la relation

$$\cos E_1 L_1 = \cos \Delta_1 = \cos z_1 \cos z'_1 + \sin z_1 \sin z'_1 \cos A$$

On calculera donc cos A par cette équation et on en portera la valeur dans la relation

$$\cos \Delta = \cos z \cos z' + \sin z \sin z' \cos A$$

On aura ainsi l'angle Δ répondant au centre de la Terre et comparable par conséquent aux distances données par la Connaissance des temps.

12 - Longitude au moyen des occultations d'étoiles ou d'astres par la Lune, au moyen des éclipses.

La Lune dans son mouvement rencontre des étoiles ou d'autres astres. A ce moment les astres disparaissent derrière le disque lunaire; on dit qu'il y a occultation.

Au moment de la disparition ou de la réapparition de l'astre, la distance de l'astre au centre de la Lune est égale au demi-diamètre apparent de la Lune; on se trouve donc dans un cas particulier du problème précédent.

Il est à noter que le phénomène est instantané et susceptible d'être observé avec une grande précision.

Le phénomène des éclipses de Soleil peut pareillement servir à déterminer l'heure du premier méridien.

Détermination des coordonnées uranographiques des astres.

13 - Observations fondamentales - Rôle des observatoires -

Leur rôle est tout d'abord de continuer sans interruption les observations du Soleil, (il faut déterminer la position du point γ et l'obliquité de l'écliptique) de la Lune, des planètes et d'un certain nombre d'étoiles appelées fondamentales, pour en obtenir des positions de plus en plus précises susceptibles d'être publiées

plusieurs années d'avance dans les recueils tels que la Connaissance des Temps. Ces positions, indépendamment de leur utilité pour les marins, les géodésiens . . . . servent de base à la comparaison du ciel avec la théorie et permettent de la rectifier. Les instruments méridiens, lunette méridienne et cercle mural, ou la combinaison des deux qui représente le cercle méridien (Planche 12 du Portefeuille), sont surtout employés. Les observations méridiennes précises datent du milieu du XVIIIème siècle, elles ont été inaugurées par l'Astronome anglais Bradley [illegible]

14. Observations méridiennes et équatoriales d'un astre nouveau.

En second lieu, on peut se proposer d'obtenir les coordonnées d'astres nouveaux, comètes ou petites planètes récemment découvertes . . .

Si l'astre est assez brillant pour être vu dans l'instrument méridien, et passe au méridien à une heure commode, le plus simple est de l'observer lors de son passage au méridien. On observera en même temps quelques étoiles fondamentales qui feront connaître la correction de la pendule sidérale par les différences

$$\mathcal{R} - (T + I) \text{ (Chapitre III, n° 11)}$$

et la division du cercle origine des distances polaires par les différences

$$\delta \text{ tirée de la Connaissance des Temps} - \delta \text{ instrumentale}$$

Si l'astre est trop faible pour pouvoir être observé au cercle méridien, dont la lunette a des dimensions moindres que celles des équatoriaux, ou s'il passe au méridien à une heure incommode on a recours à l'équatorial.

A l'équatorial correspond le système des coordonnées locales H et δ; mais l'instrument, à cause des difficultés du réglage, des flexions des axes et du tube . . . . ne pourrait donner directement des valeurs précises de ces coordonnées; on l'utilise pour les mesures différentielles, en prenant comme intermédiaires des repères appelés étoiles de comparaison, que l'on trouve en abondance dans les Catalogues de positions d'étoiles résultant des observations méridiennes accumulées depuis 150 ans.

Soient $\mathcal{R}_0$, δ_0 les coordonnées uranographiques de l'étoile de comparaison située à peu près sur le même parallèle;

$\mathcal{R}$, δ les coordonnées de l'astre nouveau; la différence

$$\mathcal{R} - \mathcal{R}_0$$

peut se déterminer en notant le passage de l'étoile et de l'astre au fil du réticule perpendiculaire au mouvement diurne, l'instrument étant fixe. Soient, en effet, $\mathcal{H}$ l'angle horaire, qui est le même, H_0 et H les heures sidérales des passages :

$$H = \mathcal{H} + \mathcal{R}$$

$$H_0 = \mathcal{H} + \mathcal{R}_0$$

d'où

$$\mathcal{R} - \mathcal{R}_0 = H - H_0 .$$

Quant à la différence $\delta - \delta_0$, on la mesure en amenant le fil mobile du micromètre sur l'astre et sur l'étoile de comparaison.

Si l'astre est assez rapproché de l'étoile, de sorte qu'ils se trouvent ensemble dans le champ de la lunette, on peut mesurer l'angle de position et la distance ou encore la différence des coordonnées $\mathcal{R} - \mathcal{R}_0$, $\delta - \delta_0$.

15. Catalogues d'étoiles. Variations des coordonnées avec le temps. Influence de la précession. Dans les Catalogues les plus anciens, les coordonnées employées étaient L et β (Chapitre IV, n° 11). Les progrès de l'horlogerie ont conduit à employer les coordonnées d'observation $\mathcal{R}$, δ. On a dit (Chap. IV, n° 12) que, à cause de la précession, le point γ se déplaçait d'un mouvement rétrograde sur l'écliptique, à raison de 50" par an; cela entraine un accroissement égal pour les longitudes comptées à partir de γ; les latitudes ne varient pas sensiblement.

Or les coordonnées d'observation $\mathcal{R}$ δ se rapportent, d'après leurs définitions à la position de γ et à l'obliquité ω pour la date de l'observation.

Les variations correspondantes des coordonnées $\mathcal{R}$ δ, dues à la précession se déduisent par différentiation des relations entre les coordonnées $\mathcal{R}$ δ et L β (Chapitre IV, n° 11); on fait

$$dL = 50'',2 \qquad d\beta = 0$$

Ces formules sont utilisées toutes les fois qu'il faut passer des valeurs des coordonnées rapportées à l'équinoxe d'une époque aux valeurs rapportées à l'équinoxe d'une autre époque, par exemple, si l'on veut avoir les coordonnées actuelles d'étoiles comprises dans un Catalogue contenant les Æ et δ pour une époque déterminée.

On obtient ainsi les coordonnées appelées moyennes auxquelles il faudra ajouter quelques petits termes périodiques dont il sera question plus loin.

L'effet de la précession croissant avec le nombre des années, devient à la longue très marqué. Les situations relatives des Constellations ne sont pas changées; mais l'aspect d'une constellation varie par rapport à l'équateur et à l'horizon puisque δ varie; il varie aussi par rapport au point γ qui se trouve maintenant de 30° en arrière dans les Poissons, alors qu'il était dans le Bélier au temps d'Hipparque.

Chapitre VI.

Application des méthodes précédentes pour déterminer la position d'un navire à la mer. Navigation par estime. Navigation astronomique.

Pour déterminer la position d'un navire à la mer, on fait usage de l'estime et des observations astronomiques.

L'estime de la vitesse du navire avec le loch et de l'orientation de la route avec la boussole et les Cartes marines peut se faire aussi souvent qu'on le veut. Mais par suite de causes diverses, les évaluations de l'orientation et de la vitesse sont faussées, et on ne peut se servir utilement de l'estime que pour un temps assez limité. Dans la navigation au long cours (*), il est nécessaire d'obtenir à des intervalles fréquents la position du navire avec précision, surtout si la vitesse du navire est grande. Les indications de l'estime comparées avec les mesures astronomiques pourront ensuite être rectifiées de proche en proche et fourniront une première approximation.

Si le ciel est masqué par les nuages, l'estime est la seule ressource du navigateur.

Navigation par estime.

1. Usage de la boussole ou compas dans la navigation. Cartes marines.

La manière la plus simple de diriger un navire d'un point à un autre est de gouverner au moyen de la boussole (compas), introduite au 13ème siècle dans la pratique de la navigation, de manière à couper les méridiens terrestres successifs sous un angle constant. La ligne que décrit ainsi le navire se nomme loxodromie.

L'objet des cartes marines est d'indiquer immédiatement cet angle.

(*) On distingue la navigation au long cours ou hauturière, c'est-à-dire de la haute mer et le Cabotage, navigation le long des côtes. Les anciens n'ont guère pratiqué la navigation au long cours.

L'equateur étant développé en ligne droite, on représente les méridiens par des droites perpendiculaires à cette ligne et équidistantes, et les parallèles par d'autres droites parallèles à l'équateur espacées entre elles d'après la condition que les angles soient conservés.

Alors la ligne que doit suivre le navire est représentée par une simple droite sur la Carte. Il suffit de tracer cette droite entre le point de départ et le point d'arrivée pour avoir l'angle sous lequel les méridiens sont coupés. On doit ensuite, en agissant sur le gouvernail, faire marquer au compas cet angle corrigé de la déclinaison locale de l'aiguille aimantée.

Calculons la distance Δ du parallèle de colatitude λ à l'équateur; Δ croit en même temps que λ. Faisons abstraction de l'échelle.

Considérons sur l'ellipsoïde terrestre le petit rectangle compris entre

les méridiens de longitude L et $L + dL$

les parallèles de colatitude λ et $\lambda + d\lambda$

il a pour côtés $ds = R\,d\lambda$ suivant le méridien, $N \sin\lambda\, dL$ suivant le parallèle; N est la longueur de la normale limitée à l'axe de révolution. R est le rayon de courbure.

Sur la carte le petit rectangle correspondant a pour côtés $d\Delta$ suivant le méridien et $a\,dL$ suivant les parallèles, a est le rayon équatorial.

Si les angles doivent être conservés, on a

$$\frac{d\Delta}{a\,dL} = \frac{R\,d\lambda}{N \sin\lambda\, dL}$$

$$d\Delta = \frac{aR}{N\sin\lambda}\,d\lambda.$$

Pour la pratique de la navigation, on peut considérer la terre comme sphérique; alors $R = N = a$.

$$d\Delta = \frac{a\,d\lambda}{\sin\lambda}$$

Pour avoir la distance, il faut intégrer entre λ et $\frac{\pi}{2}$ qui répond à l'équateur

On a

$$\int \frac{d\lambda}{\sin\lambda} = \mathcal{L}\, tg\, \frac{1}{2}\lambda$$

il vient

$$\frac{\Delta}{a} = \left(\mathcal{L}\, tg\, \tfrac{1}{2}\, \lambda\right)_{\lambda}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{\Delta}{a} = \mathcal{L}\, cotg\, \tfrac{1}{2}\, \lambda$$

Les distances Δ sont amplifiées sur la Carte ; elles sont multipliées par $\frac{d\Delta}{ds} = \frac{1}{\sin\lambda}$.

L'unité de mesure des cartes marines est la minute (1') dont la longueur est 1852 mètres ; c'est le mille marin.

On a

$$\frac{\Delta}{a} = \mathcal{L}\, cotg\, \tfrac{1}{2}\, \lambda$$

Le rapport $\frac{\Delta}{a}$ étant remplacé par celui du nombre de minutes de l'arc Δ au nombre 3437,75 contenu dans le rayon de l'équateur, on aura, en minutes.

$$\Delta = 3437',75\ \mathcal{L}\, cotg\, \tfrac{1}{2}\, \lambda = 7915',70\ \log cotg\, \tfrac{1}{2}\, \lambda\,;$$

on sait que

$$\mathcal{L}\,(\text{népérien}) = \log\,(\text{vulgaire}) \times \frac{1}{\text{Module}}$$

$$\text{Module} = 0,43429$$

Si l'on donne la longueur de la minute à l'équateur qui détermine l'écartement des méridiens, il sera facile d'obtenir la distance Δ du parallèle de colatitude λ à l'équateur et de construire le canevas de la carte.

Dans les cartes du Pilote français, on a représenté la minute de l'équateur par $0^m,0271$, quand il s'agit des abords d'un port ou d'une rade, et par $0^m,0103$ quand on veut représenter une plus grande étendue de côtes.

Les quatre côtés des Cartes marines portent des graduations. celles qui sont parallèles à l'équateur représentent l'échelle des parties égales de l'équateur seule ligne développée en vraie grandeur ; celles qui sont dans le sens des méridiens donnent les distances croissantes Δ ; on les appelle les échelles des latitudes croissantes

2. Compas.[1] Le compas se compose essentiellement d'un barreau aimanté oscillant sur un pivot et portant un disque de mica transparent sur lequel sont marquées les divisions de la circonférence. Le compas est placé dans une boîte cylindrique lestée, suspendue à la Cardan dans une cage solidement fixée au pont du navire, à portée de la vue du timonier qui tient la barre du gouvernail. La direction de l'axe du navire est marquée par une ligne de foi verticalement tracée à l'intérieur de la cage. Si l'ordre a été donné de faire route vers le N.E. par exemple, le timonier s'assure que la ligne de foi vient se placer en face de la direction N.E. de la plaque de mica portée par l'aiguille.

Il faut que le navigateur connaisse d'avance ou qu'il détermine astronomiquement l'angle compris entre la direction de l'aiguille aimantée et le méridien du lieu, pour en tenir compte dans l'évaluation de l'angle de route.

Lorsque le navire est en fer ou qu'il existe à bord du navire des masses de fer considérables, celles-ci agissent sur l'aiguille aimantée. Dans ce cas très fréquent aujourd'hui la déclinaison magnétique n'est pas constante et varie quand le navire change de direction ou de cap, et il faut la déterminer pour plusieurs caps.

Les marins appellent déviation le changement de direction de l'aiguille et variation la combinaison de la déclinaison magnétique et de la déviation en d'autres termes l'azimut de l'aiguille.

On corrige mécaniquement les déviations causées par par le fer du navire en plaçant en certains points déterminés, près de la boussole, des masses de fer doux et des barreaux aimantés.

Ces procédés, dus à Sir W. Thomson, aujourd'hui Lord Kelvin, ont une grande importance pour la marine actuelle, ils ont été exposés d'une manière très complète par Mr Collet[2], ancien Répétiteur du Cours et par d'autres officiers de Marine.

---

(1) Consulter la notice de l'Amiral Fleuriais : L'origine et l'emploi de la boussole Marine. Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1894.

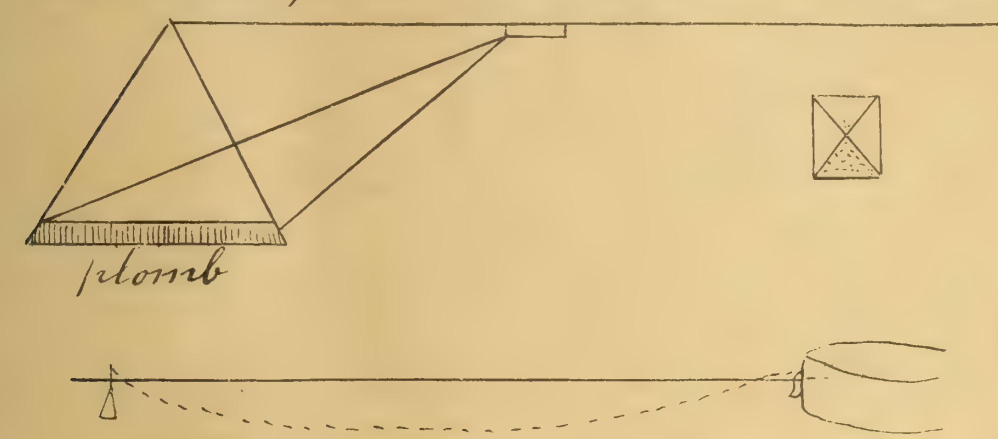
(2) Traité théorique et pratique de Régulation et de Compensation des compas 1881. Une édition anglaise a été publiée en 1885.

Le compas de relèvement est un compas portatif muni d'une alidade concentrique à la boîte, pivotant sur le couvercle avec deux pinnules diamétralement opposées. Il sert à mesurer la difference d'azimut d'un astre ou d'un objet terrestre et de la direction de l'aiguille.

3. Mesure de la vitesse du navire. Loch et Ampoulette.

Le navire étant supposé suivre la route marquée par le compas, il faut encore évaluer sa vitesse.

On se sert pour cela du Loch et de l'Ampoulette ou sablier.



Le bateau de loch est un petit triangle plein en bois, lesté par une lame de plomb placée le long d'un des côtés. Les trois sommets de ce triangle sont reliés à la ligne de loch par trois bouts de filin d'égale longueur. Quand, le navire étant en marche, le bateau de loch est lancé à la mer, il se maintient vertical, le côté lesté en bas, et reste sensiblement à la même place, si on file la ligne assez rapidement. La ligne de loch est graduée par des bouts de filin espacés de $\frac{1852^m}{120} = 15^m,4$ longueur du nœud théorique.

Quand on veut mesurer la vitesse du navire, on jette le loch à la mer et on attend qu'il soit assez éloigné pour être à l'abri des remous de l'arrière.

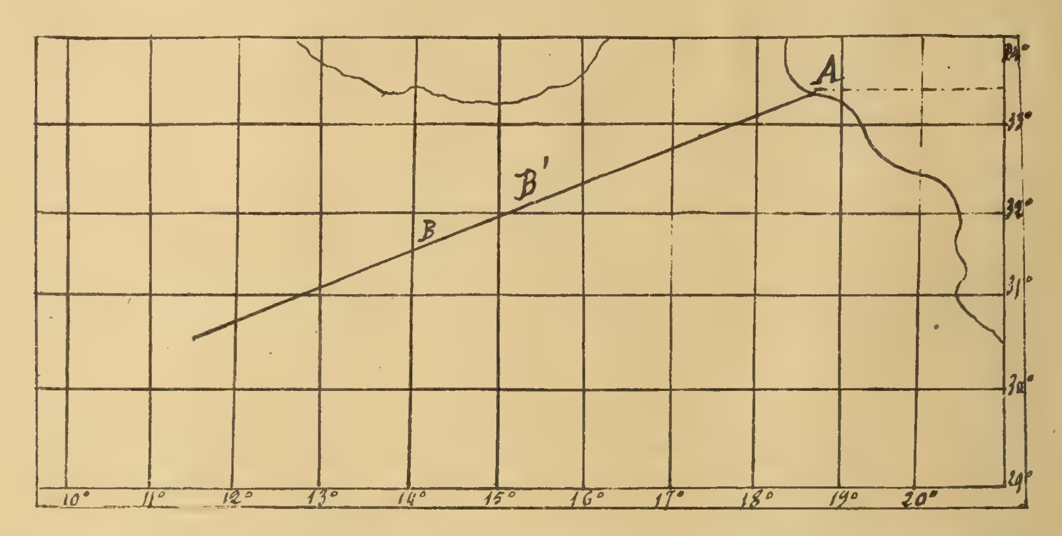
Supposons qu'en filant la ligne de loch, le bateau de loch reste immobile à la surface de la mer et remarquons que 30^s est la 120ième partie de l'heure comme le nœud est la 120ième partie du mille. Donc le nombre de milles faits en 1 heure sera égal au nombre de nœuds filés en 30^s.

On a expérimenté d'autres moyens pour déterminer la vitesse du navire.

Souvent les Commandants de navires évaluent le chemin parcouru d'après le nombre de tours d'hélice.

4. Usage des Cartes Marines. Après que le pilote a conduit le navire en pleine mer en se guidant sur des bouées, des balises, des phares et d'autres repères, le Commandant fait relever des points connus sur la terre encore en vue, marque sur la carte la position du navire et donne l'angle de route; C'est le point de départ.

A une époque ultérieure, il faut pouvoir marquer sur la carte la position estimée du navire, en latitude et longitude.



Soit A le point de départ, on tire sur la carte la droite indéfinie AB faisant avec les méridiens l'angle de route. Prendre ensuite sur l'échelle des latitudes, par le travers de A, m graduations de 1' si m milles ont été filés (puisque la longueur du mille sur la carte dans le voisinage de A est évidemment égale à la graduation de 1' de l'échelle des latitudes) et porter la longueur trouvée à partir du point A, le long de la route tracée. Le point B' ainsi obtenu représente avec une approximation suffisante en pratique le point d'arrivée. il n'y aura plus qu'à relever la latitude et la longitude de B'.

C'est à l'approche des côtes, au moment de l'atterrissage, que la navigation présente le plus de difficultés, de dangers; on se sert alors de cartes à échelle plus grande donnant l'hydrographie des côtes, l'indication des hauts fonds, les lignes de sondage ainsi que les phares, bouées etc.

Il est clair qu'à ce moment la connaissance du niveau de l'eau de la mer ou de la marée est de première importance. On reviendra plus loin sur le phénomène des marées, causées principalement par la Lune.

Navigation astronomique.

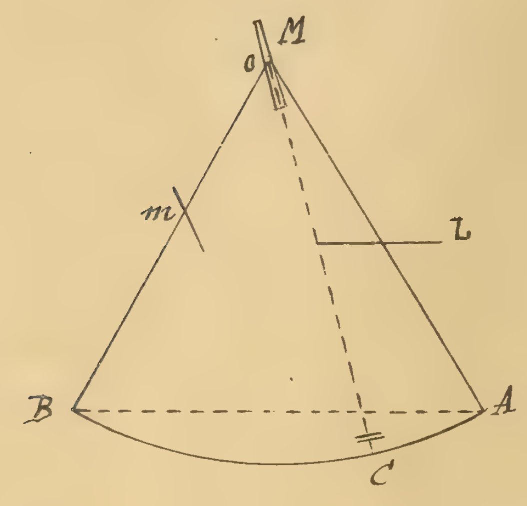
Les méthodes précédemment exposées pour déterminer la colatitude, l'heure et la longitude d'une station ainsi que la direction du méridien sont également employées par les voyageurs, qui se proposent de fixer les principaux repères de la carte d'un pays inconnu et par les marins. Nous allons maintenant parler de leur application à la navigation.

5. Sextant. On s'est servi pendant longtemps de l'arbalestrille ou bâton de Jacob qui se composait d'une planchette de bois OL au milieu de laquelle était implanté un axe X, sur lequel se déplaçait une seconde planchette PP perpendiculaire à la première.

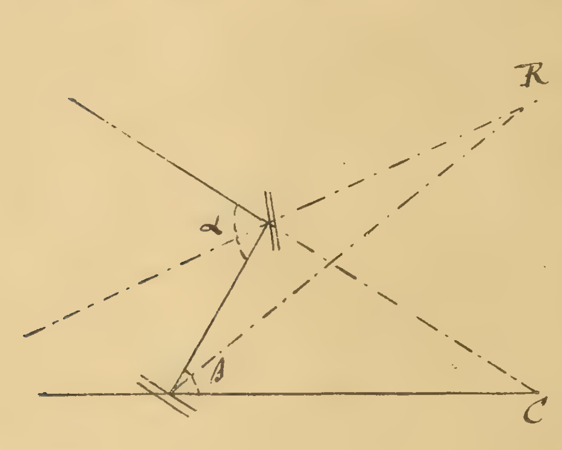
S L O P I P X α

Pour observer la hauteur du Soleil, unique usage de l'instrument, on tournait le dos à cet astre, et plaçant l'œil en O, on faisait mouvoir la planchette PP en la tenant alignée sur l'horizon de la mer, tandis que l'ombre du Soleil donnée par la planchette OL était mise en contact avec PP. L'angle OIL facile à évaluer d'après l'appareil donnait la hauteur du Soleil au dessus de l'horizon apparent de la mer.

Dans le sextant, dont l'idée première est due à Newton, un secteur AOB de 60°, avec arc divisé, porte sur le rayon OB un petit miroir fixe m à moitié étamé dont le plan est perpendiculaire au plan du limbe et parallèle au rayon OA. L'alidade mobile figurée par le rayon mobile OC entraine un grand miroir M dont le plan est aussi perpendiculaire au plan du limbe. Une lunette astronomique L fixée au rayon OA parallèlement à la corde AB permet de juger de la coïncidence de deux objets, l'un vu directement à travers la partie non étamée de m, l'autre doublement réfléchi sur M et m.



Principe de l'instrument: l'angle des deux miroirs est la moitié de la distance angulaire des objets visés:



Distance angulaire des objets

$$C = \alpha - \beta$$

angle des deux miroirs ou des normales aux deux miroirs

$$R = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}C$$

Soit u la division lue sur l'arc du secteur au moment de la coïncidence des objets A et B; il faut avoir le déplacement de l'alidade de cette position à celle de u_0 qui a lieu quand les deux miroirs m et M sont parallèles, position qu'on trouve en amenant l'image doublement réfléchie du Soleil à coïncider avec l'image vue directement. $u - u_0$ sera la moitié de la distance angulaire de A et B. On gradue l'arc de manière à lire la véritable distance.

6 – Mesure d'une hauteur de Soleil au dessus de l'horizon de la mer – On place le limbe du sextant verticalement, en tenant l'instrument par la poignée, et on le dirige de manière à voir par la lunette et à travers la partie non étamée du petit miroir l'horizon de la mer. Si le plan vertical de l'instrument passe par le Soleil il suffira de faire marcher l'alidade, et par suite le grand miroir pour amener l'image doublement réfléchie du Soleil à toucher par son bord la ligne d'horizon. On lit alors sur le limbe gradué la position u de l'alidade, et $u - u_0$ est l'angle cherché.

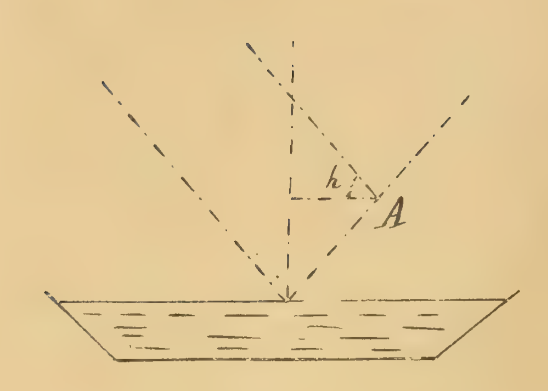
Par l'effet du roulis et du tangage, les deux images se déplacent dans le champ de l'instrument, mais la coïncidence n'est pas détruite.

7 – Dépression de l'horizon – Pour avoir la hauteur d'un astre au dessus de l'horizon vrai et non plus au dessus de l'horizon de la mer, il faut appliquer à la hauteur mesurée avec le sextant la correction de dépression; elle dépend de la hauteur de l'œil au dessus de la surface de la mer et dans une mesure notable des conditions physiques des couches d'air traversées par le rayon lumineux, ainsi que de l'état de la mer : on ne peut compter sur une précision beaucoup supérieure à 1'.

A bord d'une frégate, la hauteur de l'oeil est de 7 mètres environ, on admet une correction de dépression de 4'52", angle qu'il faudra retrancher de toutes les hauteurs des astres observées au sextant, pour les rapporter au véritable plan horizontal.

8 – Emploi du sextant à terre avec un horizon artificiel –

On peut employer comme horizon artificiel un bain de mercure, couvert quand il est nécessaire de le protéger contre le vent par un toit fait de plaques de verre à faces planes et parallèles. Dans ce cas, on mesure l'angle entre le rayon direct et le rayon réfléchi sur le mercure; on a deux fois la hauteur apparente de l'astre, le soleil par exemple.



On obtient ainsi une précision bien supérieure à celle des observations faites à la mer. Aussi les marins ont-ils soin de recourir à cette méthode aux points de relâche.

9. Indications sur les rectifications du sextant.

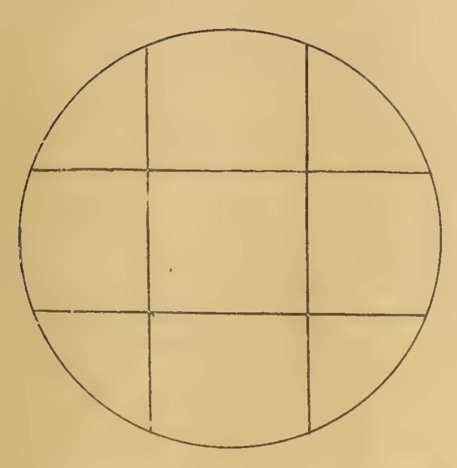
On a supposé les deux miroirs du sextant perpendiculaires au plan du limbe, et l'axe optique de la lunette parallèle à ce même plan. S'il y a de petites différences, le plan des objets à viser fera un petit angle avec le plan du limbe; l'erreur sur la distance angulaire des objets sera du second ordre de petitesse.

Pour rectifier d'une manière suffisamment approchée le grand miroir, on place l'œil à côté du grand miroir de manière à voir le limbe du sextant par réflexion dans le grand miroir: si celui-ci est en effet perpendiculaire, l'arc réfléchi fait exactement la continuation de l'arc qu'on aperçoit directement. Quand le grand miroir est oblique au limbe, ces deux arcs l'un direct l'autre réfléchi, ont une fracture apparente à leur jonction.

Quant au petit miroir, on juge s'il est perpendiculaire au limbe, en amenant en coïncidence les deux images directe et doublement réfléchie d'un astre ou d'un point éloigné; les deux miroirs sont alors parallèles.

Les marins rectifient souvent le petit miroir à l'horizon de la mer.

Des vis de rappel permettent de faire ces rectifications ainsi que celle de l'axe optique. Cette dernière rectification s'obtient en s'assurant que l'axe optique de la lunette, le centre du carré formé par les fils remplaçant ici la croisée de fils du réticule passe par le même objet éloigné (d'au moins 30 mètres) que la ligne des viseurs établis sur le limbe dans la direction de l'objet.



La lunette est d'ailleurs portée par une vis spéciale qui permet, sans altérer le parallélisme de son axe optique avec le plan du limbe, de régler leur distance de telle sorte que l'image directe et l'image réfléchie rendues à peu près égales par les miroirs colorés placés en avant des deux miroirs soient égalisées ; ce qui est important pour les observations. Il faudrait tenir compte de l'erreur d'excentricité puisqu'il n'y a qu'un seul vernier dans le sextant. Le défaut de parallélisme des faces des verres colorés qu'on emploie pour observer le Soleil introduit aussi des erreurs. Mais à moins qu'on ne demande à l'instrument toute la précision possible, on peut les négliger à la mer.

10. Navigation astronomique. Détermination à bord de l'heure, de la colatitude et de la variation du compas.

Dans les premiers voyages au long cours, alors que les chronomètres n'étaient pas inventés, on utilisait seulement le compas et la hauteur méridienne du Soleil qui donnait la colatitude (Chap. V, n° 7) ; on n'avait pas de moyen sûr pour obtenir la longitude. Les pêcheurs qui se rendent chaque année des ports de Bretagne au banc de Terre-Neuve, agissent encore de même ; ils ont rarement des chronomètres ; ils mesurent la hauteur du Soleil avec un sextant ou plutôt un octant.

Voici le procédé suivi, jusqu'à ces dernières années, dans la navigation au long cours. Partant d'un point connu on estime avec soin la route en direction et en vitesse. Le lendemain du départ, vers 8^h du matin, on observe la hauteur du Soleil. Si l'on connaissait exactement la colatitude du point où l'on se trouve à ce moment là, cette observation permettrait de calculer l'angle horaire et l'heure du lieu par les formules du n° 6 du chap. V. (*) L'estime donne une valeur de colatitude, affectée d'erreurs sensibles en général ; mais l'observation étant faite dans les circonstances favorables (le plus loin possible du méridien) l'erreur sur l'angle

(*) Les valeurs des coordonnées du Soleil et des autres quantités utiles sont tirées de la Connaissance des Temps.

horaire dépend peu de celle commise sur la colatitude et la formule.

Longitude = heure du lieu - heure de Paris (marquée par les chronomètres) donne une valeur plus exacte que l'estime.

On observe ensuite le soleil à midi; par la méthode du Chap. V, N° 7 on en conclut la colatitude pratiquement exacte. Cette colatitude permet de contrôler celle qu'on a employée pour le calcul de l'angle horaire du matin. On peut alors calculer à nouveau l'angle horaire et en déduire une longitude plus exacte. Le changement en longitude, entre les deux observations, calculé par l'estime, permet de conclure la longitude à midi. On a donc les coordonnées du navire ou un point complet. Cette méthode d'approximations successives doit son succès à ce que l'erreur d'estime, proportionnelle au temps, est beaucoup plus petite pour un intervalle de 4^h, intervalle supposé des observations, que pour une journée. On peut contrôler l'observation du matin en observant un deuxième angle horaire après midi, dans la position symétrique de celle du matin.

La connaissance de la variation du compas, en d'autres termes de l'azimut de l'aiguille aimantée, sert à assurer la direction de la marche du navire.

Pour le déterminer, on emploie le compas de relèvement muni de deux pinnules placées verticalement sur le rebord de la boîte. L'alidade formée par ces deux pinnules, est dirigée (à l'œil nu) vers le soleil, lorsqu'il a une faible hauteur au dessus de l'horizon, et l'on note son azimut magnétique et l'heure de l'observation.

L'azimut du soleil est calculé par la formule du n° 8, (Chapitre V).

$$\cot g A \sin \delta \sin AH = - \sin \lambda \cos \delta + \sin \delta \cos \lambda \cos AH;$$

La différence de l'angle A avec l'azimut magnétique du soleil donne la variation du compas.

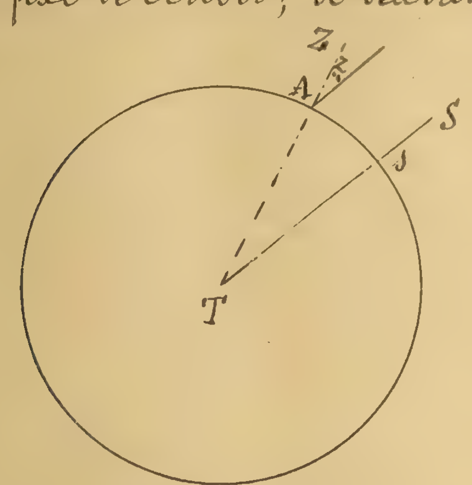
11 - Nouvelles méthodes de navigation - Cercles et droites de hauteur. Principe de la méthode Sumner.

L'application des méthodes ordinaires peut être gênée par les circonstances; il peut arriver qu'aux heures convenables le soleil soit couvert par les nuages.

Parfois on utilise des observations de nuit, telle que celle de la Polaire, pour avoir la colatitude.

Mais l'emploi de vitesses de plus en plus grandes dans la navigation, et d'autre part les progrès réalisés dans la construction des chronomètres ont conduit à utiliser une observation isolée quelconque de hauteur.

Toute hauteur d'astre, observée à un instant quelconque, conduit à la détermination d'un petit cercle de la sphère, appelé cercle de hauteur, sur lequel se trouve le navire. Le chronomètre en fixe le centre; le sextant le rayon.



A un moment quelconque, le Soleil S est au zénith d'un certain point de la surface terrestre (on la suppose sphérique)

L'observateur, dans la station A, mesure la distance zénithale du Soleil.

Prenons pour plan du tableau le plan passant par S, A et le centre T de la Terre.

L'angle z est égal à STA.

Si du point s comme centre, on décrit un petit cercle de rayon As, cercle de hauteur, l'observateur devra se trouver sur ce cercle. De plus, si l'on a approximativement l'azimut du Soleil vu de A, et si l'on connaît s, on aura à peu près la position de l'observateur sur le cercle de hauteur.

La position de s est d'ailleurs connue par rapport au méridien de Paris; La Connaissance des Temps donne la distance polaire δ du Soleil. Le chronomètre donne l'heure moyenne de Paris c'est-à-dire (n°2 du chap. V) l'angle horaire du Soleil moyen par rapport au méridien de Paris. La formule

$$H \text{ moyenne} = H_{\odot} + \text{Equ. du temps}$$

fait connaître l'angle horaire $H_{\odot}$ du Soleil par rapport au méridien de Paris; s est par suite connu par les coordonnées locales H et δ.

Deux observations de hauteur à quelques heures d'intervalle déterminent, au moins en principe, la position du navire, supposé immobile, par l'intersection de deux cercles. Si le navire s'est déplacé, on transporte le premier cercle de hauteur d'une

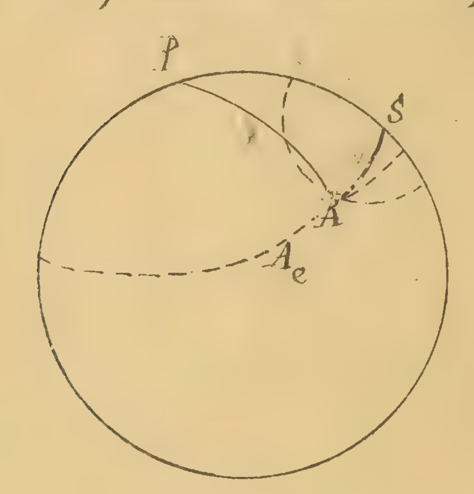
quantité égale au déplacement estimé et on prend l'intersection avec le nouveau cercle de hauteur.

Les droites de hauteur sont les parties utiles des cercles de hauteur; on les remplace par des droites pour simplifier.

Pour donner une idée du rôle des nouvelles méthodes, supposons qu'en allant d'Europe en Amérique et approchant de la côte Est des Etats Unis, on ait fait une observation de hauteur du Soleil dans la matinée. La droite de hauteur correspondant à l'azimut du Soleil dans le Sud-Est sera presque parallèle à la côte américaine et ainsi, par une seule observation, on aura à peu près la distance du navire à la côte ce qui importe surtout.

La détermination des droites de hauteur, de plus en plus employée dans la Marine, se fait à l'aide de la carte de Mercator.

Pour prendre un exemple supposons qu'on ait observé une distance zénithale z d'un astre laquelle détermine un cercle de hauteur ayant son centre en S; que la position estimée du navire soit A_e par une colatitude λ; $PS = \delta$.



Parmi les points du cercle de hauteur voisins de A_e choisissons le point A sur le même parallèle et construisons la droite de hauteur.

On a les relations suivantes données par le triangle PSA.

$$\cos z = \cos\lambda \cos\delta + \sin\lambda \sin\delta \cos P,$$

$$\cos\delta = \cos\lambda \cos z + \sin\lambda \sin z \cos PAS,$$

qui permettent d'obtenir les angles P et PAS. Le premier fait connaître le méridien de la carte sur lequel se trouve le point A; on en connaît d'ailleurs la colatitude. L'angle PAS du méridien et de la normale au cercle de hauteur se conserve sur la Carte; on peut donc tracer la tangente à la courbe de hauteur ou la droite de hauteur.

Au lieu d'employer comme point déterminatif de la droite de hauteur le point ayant même colatitude, les marins emploient aussi le point ayant même longitude que le point estimé A_e et

surtout le point rapproché intersection du cercle de hauteur avec le grand cercle SA_e. (Consulter pour plus de détails : J. B. Guilhaumon, Eléments de Cosmographie et de navigation.)

12. Voyages de circumnavigation. Conservation des dates en mer. On sait que dans un lieu donné le jour solaire commence à l'instant du passage du soleil au méridien ; il ne peut y avoir dans ce lieu aucune incertitude sur la manière de compter les jours solaires, aucune incertitude non plus pour compter les jours en temps civil.

Le voyage de Magellan (1521) présenta pour la première fois une particularité curieuse. Au retour à San-Lucar, le point de départ, il se trouva qu'on avait perdu un jour : le jour de l'arrivée était pour le bord le 20 Septembre, tandis qu'on comptait le 21 à San Lucar. Cela tenait à ce que le vaisseau de Magellan ayant fait route de l'Est à l'Ouest, dans le sens du mouvement diurne, tous les jours avaient été allongés et leur nombre diminué de un jour, le méridien terrestre TM du vaisseau tournant dans le sens du mouvement diurne et étant revenu au point de départ S.

L'inverse a lieu pour les voyageurs qui font le tour de la Terre dans l'autre sens, de l'Ouest à l'Est dans le sens direct ; ils ont des jours plus courts et leur nombre est augmenté d'une unité au retour.

Pour éviter cette discordance, la règle suivante est suivie par les marins ; chaque fois qu'ils traversent le méridien opposé à leur premier méridien, ils changent de date, ajoutent une unité quand ils vont vers l'Ouest, et retranchent une unité quand ils vont vers l'Est.

Comme les nations européennes n'ont pas le même premier méridien, il en résulte que deux navires qui se rencontrent dans l'Océan Pacifique, vers le 180ième degré, peuvent avoir, à bord, des dates différentes.

Un congrès s'est réuni en 1884 à Washington en vue de l'adoption d'un méridien unique.

Chapitre VII.

Système de Copernic.

Lois de Kepler.

1_ Les observations les plus simples font vite reconnaître outre le Soleil et la Lune, des astres mobiles d'un éclat exceptionnel, les planètes: Mercure, Venus, Mars, Jupiter, Saturne tous ces astres se déplacent sur la sphère céleste dans des trajectoires qui ne sont pas très écartées de l'écliptique; les mouvements sont toujours directs pour le Soleil et la Lune, pour les planètes, il y a des oscillations, le mouvement direct prenant toujours l'avantage comme le montre la figure qui se rapporte à la planète Jupiter

En A et B la planète est stationnaire; elle rétrograde de A à B.

Vénus se trouve tantôt avant, tantôt après le Soleil, ce qui explique les noms d'étoile du matin et d'étoile du soir qu'on lui a donnés autrefois avant de reconnaître qu'on avait affaire à un seul astre.

Quand la Lune est dans la direction du Soleil, elle en cache parfois une partie; il y a éclipse de Soleil. Parfois aussi, la Lune entre dans le cône d'ombre projeté par la terre; il y a éclipse de Lune.

On distingue les positions des astres placés en ligne droite en disant qu'ils sont dans le premier cas, en conjonction (d'un même côté par rapport à la terre); dans le second cas la lune est en opposition avec le Soleil.

Ces définitions sont valables pour un autre astre que la Lune. C'est au temps des oppositions que les planètes sont le mieux observables, étant visibles toute la nuit.

Les anciens, qui ont laissé une théorie suffisante du mouvement apparent du Soleil, n'ont pu expliquer d'une manière satisfaisante les apparences offertes par les planètes, par exemple les rétrogradations. Copernic a montré que l'ensemble des phénomènes s'expliquait d'une manière fort simple en mettant le Soleil au centre des mouvements et faisant tourner les planètes autour de lui dans des orbites presque circulaires, de plus ou plus grandes et presque couchées sur l'écliptique.

Par là Copernic, n'a pas seulement fait connaître la constitution du système solaire; il a préparé les découvertes de Kepler et l'explication mécanique de Newton, laquelle fait tout découler de la seule loi de la gravitation, instrument de découvertes désormais aussi fécond que l'observation elle-même.

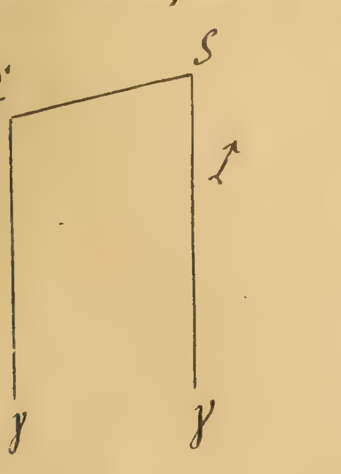
La Terre se trouve alors être une planète, la troisième dans l'ordre de distance au Soleil, Mercure et Vénus étant plus près qu'elle; on les appelle planètes intérieures.

Les planètes les plus éloignées sont, dans l'ordre d'éloignement : Mars, Jupiter, Saturne (il n'y en avait pas d'autres connues au temps de Copernic) Uranus et Neptune; on les appelle planètes extérieures.

Quant à la Lune, elle joue le même rôle par rapport à la terre qu'une planète vis-à-vis du Soleil elle ne mérite pas le nom de planète que lui donnait Ptolémée; elle rentre dans la catégorie des satellites.

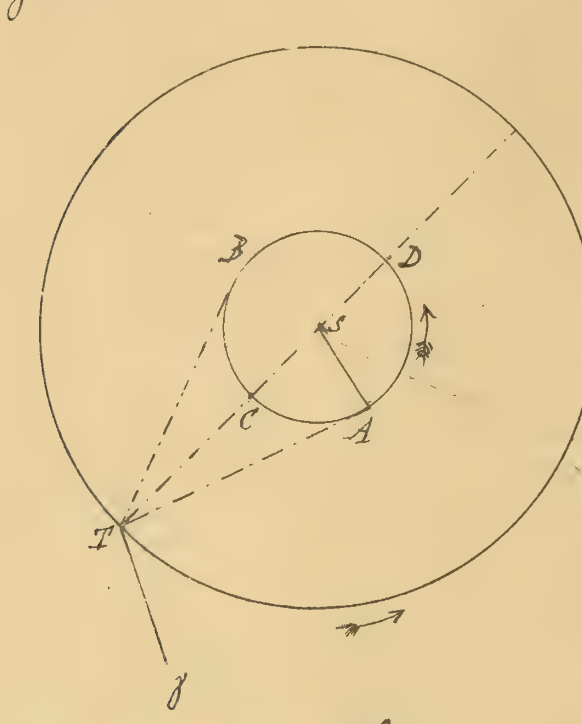
2. Explication des apparences des planètes dans le système de Copernic.

Les résultats obtenus pour le mouvement apparent du Soleil sont faciles à interpréter dans le système de Copernic.



Les observations du Soleil, la Terre étant supposée fixe, ont donné les longitudes γTS du Soleil, les longitudes correspondantes de la Terre vue du Soleil seront γTS + 180°, si l'on connait l'orbite apparente du Soleil, autour de la Terre, supposée fixe, il suffira de la faire tourner de 180° autour de T dans le plan de l'écliptique, pour avoir l'orbite de la Terre autour du Soleil supposé fixe. Dans les deux cas, les deux orbites seront égales et elles seront parcourues dans le même sens.

Dans le cas d'une planète intérieure, Vénus par exemple, on trouve que la planète, vue de la terre T, ne peut pas s'éloigner angulairement du Soleil au delà d'une certaine limite représentée par l'angle STA, la plus grande élongation.



La planète est tantôt avant tantôt après le Soleil dans le sens du mouvement direct.

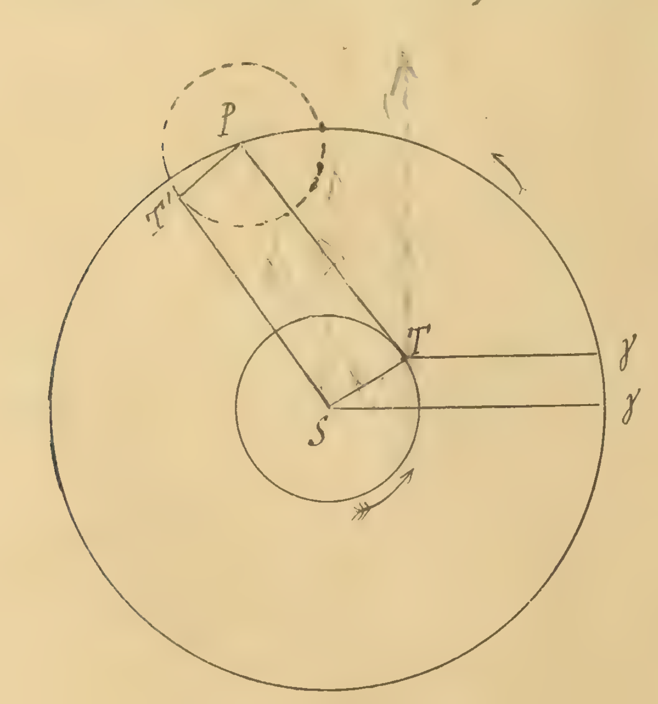
En C et D ont lieu les conjonctions de la planète; en C conjonction interne, en D conjonction externe.

Les observations anciennes de la planète près des conjonctions donnent (exactement ou à 180° près) les longitudes de la planète vue du Soleil c'est-à-dire héliocentriques; et comme les conjonctions se reproduisent en différents points de l'orbite de la planète, il est possible de recueillir un certain nombre de positions héliocentriques, et de déterminer la durée de la révolution de la planète autour du Soleil.

L'angle de la plus grande élongation STA fait connaître d'autre part le rapport $\frac{SA}{TS}$ des rayons des deux orbites de la planète et de la Terre.

Copernic n'a donc eu qu'à interpréter convenablement les observations anciennes pour en déduire, dans son système les rapports des rayons des orbites et les durées de révolution autour du Soleil.

Prenons le cas d'une planète extérieure



On voit la planète P suivant TP; on observe une longitude γTP. Menons ST' parallèle et égale à TP.

On aurait la même apparence si du point fixe S on observait l'astre T' qu'on ferait mouvoir sur un cercle PT', de rayon égal à ST, T' faisant sa révolution dans le même temps que la terre et dans le même sens, pendant que le centre P parcourrait l'orbite de la planète.

C'est le principe du système des épicycles des Anciens plus compliqué comme on voit que le système de Copernic.

Il faut ajouter que les anciens ne savaient pas que les rayons des cercles épicycles PT' avaient pour toutes les planètes la même valeur, égale au rayon de l'orbite terrestre.

Si l'on appelle R et R' les rayons des orbites de la Terre et de la planète, L et L' leurs longitudes héliocentriques, Δ la distance TP de la planète à la Terre, le triangle STP projeté sur la direction $S\gamma$ et sur la direction perpendiculaire fournit les relations évidentes

$$\Delta \cos \gamma TP = R' \cos L' - R \cos L,$$

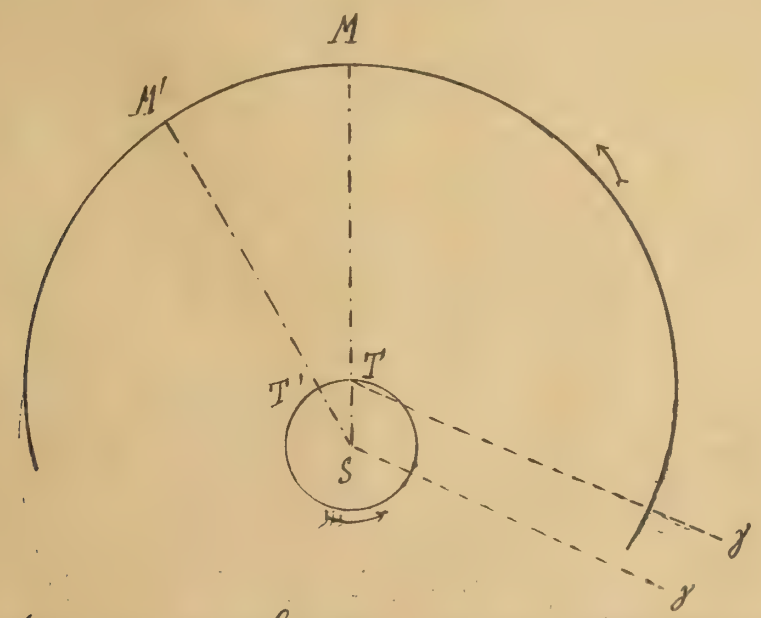
$$\Delta \sin \gamma TP = R' \sin L' - R \sin L.$$

On tirera de là l'angle γTP et on aura ainsi le moyen de comparer la théorie avec l'observation lorsqu'on connaîtra les longitudes L, L' et les rayons vecteurs R et R'.

Voyons comment Copernic pouvait déduire des anciennes observations les valeurs des T' et des R.

3. Oppositions des planètes extérieures. On en déduit la loi des longitudes.

Lorsqu'une planète extérieure M se trouve à l'opposé du Soleil,



dans la direction ST prolongée, en d'autres termes, au moment de l'opposition, elle se trouve dans les circonstances les plus favorables pour l'observation.

La longitude géocentrique ♈TM, pour le moment de l'opposition, sera égale à la longitude héliocentrique ♈SM.

Au bout d'un certain temps, la planète aura parcouru l'arc MM', tandis que la Terre, dont le mouvement est plus rapide, aura parcouru son orbite entière plus l'arc TT', et la planète observée de nouveau en opposition, donnera une nouvelle longitude héliocentrique ♈SM'.

L'intervalle de temps qui sépare deux oppositions se nomme révolution synodique. Il est facile d'en calculer la durée.

Soient T et T' les révolutions sidérales des deux planètes, n et n' leurs vitesses angulaires en un jour

$$n = \frac{360^\circ}{T}, \qquad n' = \frac{360^\circ}{T'}$$

La vitesse de la Terre relativement à la planète sera $n - n'$ ou $\frac{360^\circ}{T} - \frac{360^\circ}{T'}$, lorsqu'animée de cette vitesse angulaire rélative elle aura parcourue 360°, une nouvelle opposition aura lieu. On aura donc pour la révolution synodique Σ.

$$\Sigma = \frac{360^\circ}{n - n'} = \frac{TT'}{T' - T}$$

On trouve ainsi les valeurs suivantes à coté desquelles on a mis les valeurs de T' tirées de $\Sigma = \frac{TT'}{T'T}$

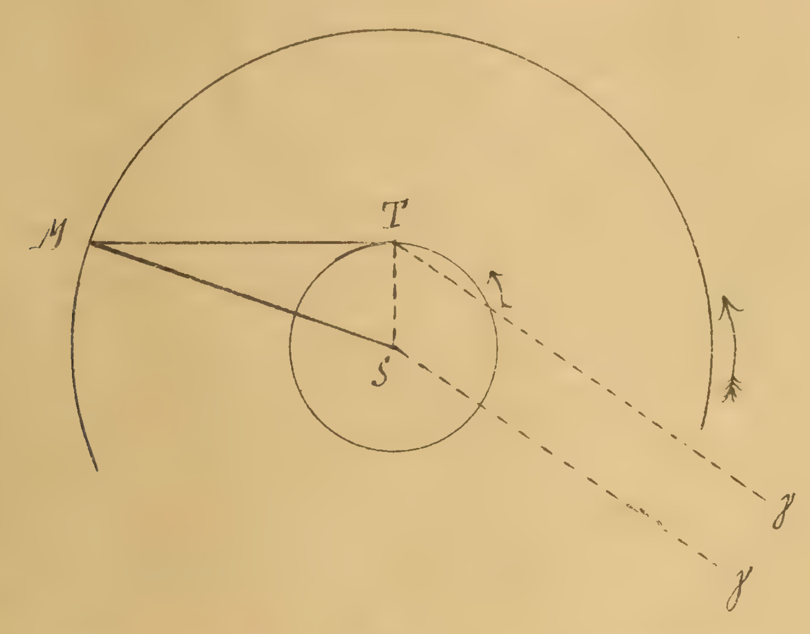
Mars	Σ = 780 jours	T' = 687 jours
Jupiter	399 "	4333 "
Saturne	378 "	10759 "

Pour Mercure et Venus, la révolution synodique est l'intervalle de temps qui sépare deux conjonctions de même nom; on a

Mercure	Σ 116 jours	T' = 88 jours
Venus	584 "	225 "

Les oppositions successives étant réparties assez régulièrement sur toute l'orbite, on en déduit les longitudes héliocentriques de la planète dans une foule de directions et on a le moyen d'étudier le mouvement en longitude de la planète.

4- Quadratures des planètes ; on en déduit les rayons vecteurs des orbites - Supposons que l'on observe la planète non plus en opposition dans le voisinage de minuit, mais



loin de l'opposition vers 6^h du matin ou du soir lorsque la droite TM est perpendiculaire à TS la planète étant dite alors en quadrature.

Les longitudes γTM, γTS sont connues par ce qui précède. Du triangle MTS, on déduit

$$SM = ST \frac{\sin T}{\sin M}.$$

Il est clair que ST étant supposé connu ainsi que l'angle en S, l'erreur à craindre dans le calcul de SM sera d'autant plus faible que les angles T et M seront plus grands ; qu'on sera plus loin de l'opposition ; l'angle en S différence de la longitude observée de la planète et de la longitude de la Terre peut être considéré comme connu.

On calculera ainsi les rayons vecteurs SM.

Copernic a trouvé les nombres suivants pour les moyennes distances des planètes au Soleil, la distance moyenne de la terre au Soleil étant prise pour unité.

Mercure	0,36
Vénus	0.72
La Terre	1,00
Mars	1,52
Jupiter	5.22
Saturne	9.21

En comparant le triangle MTS à celui d'une triangulation on voit que l'hypothèse de Copernic fournit une base: le rayon ST de l'orbite de la terre autour du Soleil.

Le système de Copernic a réussi à expliquer toutes les apparences par la combinaison du mouvement de la Terre autour du Soleil avec celui des planètes.

5. La précession dans le système de Copernic.
Elle se réduit dans ce système à un mouvement de l'axe de la terre par suite duquel le point d'intersection de l'écliptique fixe et de l'équateur mobile rétrograde de 50" par an; c'est une interprétation très simple de la découverte d'Hipparque relativement à l'accroissement des longitudes (Chapitre IV, n° 12)

6. Preuves du mouvement de translation de la Terre autour du Soleil.
Comme dans le cas du mouvement de rotation de la Terre sur elle-même, le système de Copernic expliquant les apparences par l'intervention du mouvement de révolution de la Terre autour du Soleil, à raison de 30 Kilomètres par seconde, n'a pu être d'abord justifié par des preuves directes.

Tycho-Brahé, qui ne croyait pas les étoiles à une distance immense, objectait que les positions apparentes des étoiles devraient offrir des variations considérables dans l'hypothèse du mouvement de translation de la terre; ne trouvant pas de telles variations, il était autorisé à le nier.

En réalité, les variations existent, mais elles sont très petites et n'ont été déterminées que dans le XIXième siècle.

Bradley, au XVIIIième siècle, par la découverte de l'aberration, produite par la combinaison de la vitesse de la lumière avec la vitesse de la Terre, a apporté la première preuve.

Une preuve très nette est celle fournie récemment par l'application de l'Analyse spectrale à la détermination de la vitesse des astres suivant le rayon visuel ou vitesse radiale. On en parlera plus loin.

7. Observations de Tycho-Brahé (1546-1601). –

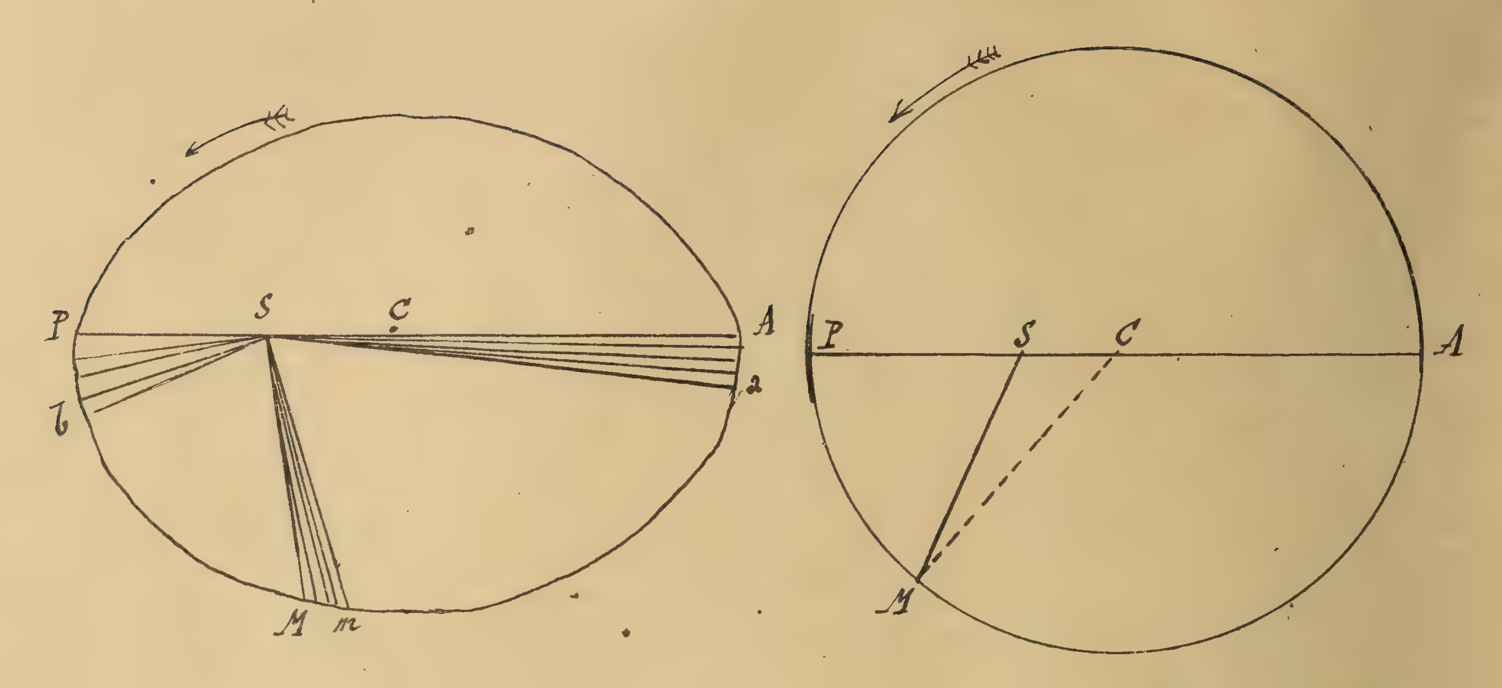
De nouveaux instruments inventés, et des perfections nouvelles ajoutées aux anciens; une précision beaucoup plus grande dans les observations; un Catalogue d'étoiles, fort supérieur à ceux qu'on possédait; une connaissance plus parfaite des réfractions astronomiques; des observations très nombreuses des planètes qui ont servi de base aux lois de Képler, tels sont en laissant de coté ses découvertes sur la Lune et sur les comètes les principaux services que Tycho-Brahé a rendus à l'Astronomie.

Dans ses dernières années, Tycho-Brahé eut pour disciple et pour aide Képler (1571-1631)

Lois de Képler.

8. Forme elliptique des orbites des planètes – Loi des aires décrites –

L'examen approfondi des observations de Tycho-Brahé a conduit Képler à ce résultat que la courbe décrite par la planète Mars était un ovale, une ellipse, dont le Soleil occupe un foyer; ce résultat a été étendu par lui à toutes les planètes. L'examen des observations avait montré à Képler que les théories des anciens laissaient subsister des écarts trop grands avec les observations.



Les deux figures permettent de comparer les deux théories de Képler et d'Hipparque ; la différence est petite si l'excentricité de l'ellipse est petite ce qui est le cas de toutes les planètes, Mars et Mercure exceptées.

La loi du mouvement de la planète M sur l'ellipse est telle que les aires décrites par le rayon vecteur allant du soleil à la planète sont proportionnelles aux temps.

Si l'on considère par exemple les arcs de trajectoires décrits en un jour par la planète près du périhélie P, de l'aphélie A et un point M quelconque de l'orbite, il faut que les aires des secteurs

$$PSb, \quad MSm, \quad ASa$$

soient équivalentes.

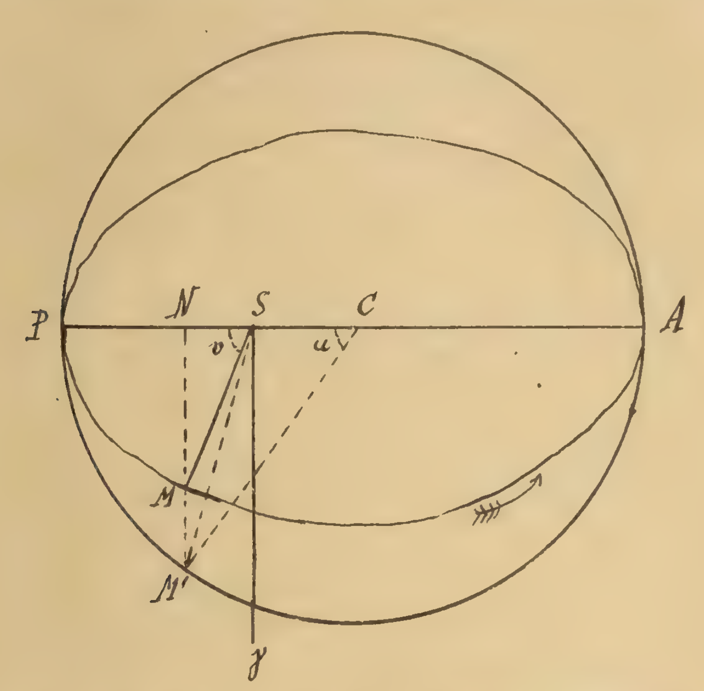
En particulier, les deux aires décrites près du périhélie et de l'aphélie sont entre elles comme les produits

$$\text{arc } Pb \times PS \text{ et arc } Aa \times AS;$$

les deux aires étant égales, les arcs décrits doivent être inversement proportionnels aux distances périhélie et aphélie.

Cette relation établie d'abord dans le voisinage du périhélie et de l'aphélie, Képler l'étendit aux autres points des orbites.

9. Calcul de la position d'une planète sur son orbite, conformément aux lois de Képler, pour une époque quelconque. Éléments de l'orbite. Prenons d'abord le cas d'une planète dont l'orbite est couchée dans l'écliptique.



Soient
a, e le demi grand axe et l'excentricité de l'orbite
T la durée de la révolution sidérale (en jours solaires moyens)
θ l'époque supposée du passage de la planète au périhélie P.

Il s'agit d'obtenir pour une époque quelconque t l'angle PSM appelé anomalie vraie compté à partir du périhélie dans le sens direct et le rayon vecteur SM.

D'après la loi des aires, l'aire décrite dans le temps $t-\theta$ représentée par le secteur PSM est à l'aire totale de l'ellipse décrite dans le temps T comme $t-\theta$ est à T.

Pour avoir l'expression de l'aire PSM, on décrit un cercle sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre et on prolonge la perpendiculaire MN au grand axe jusqu'en M' avec le cercle ; le secteur PSM peut-être considéré comme la projection de l'aire PSM' limitée par le cercle sur un plan incliné d'un angle dont le cosinus est $\frac{b}{a}$.

Or aire PSM' = aire secteur PCM' − aire triangle SCM'

Si l'on introduit l'inconnue auxiliaire $PCM' = u$, appelée anomalie excentrique, on a

$$\text{aire du secteur } PCM' = \frac{1}{2} a^2 u.$$

$$\text{aire du triangle } SCM' = \frac{1}{2} a\, c \sin u = \frac{1}{2} a^2 c \sin u.$$

De là

$$\text{aire } PSM' = \frac{1}{2} a^2 (u - c \sin u)$$

et

$$\text{aire du secteur } PSM = \frac{1}{2} a^2 (u - c \sin u) \frac{b}{a}$$

$$= \frac{1}{2} ab (u - c \sin u).$$

D'après la loi des aires, on aura donc, πab étant l'aire de l'ellipse.

$$\frac{\frac{1}{2} ab (u - c \sin u)}{\pi ab} = \frac{t - \theta}{T}$$

d'où

$$u - c \sin u = \frac{2\pi}{T} (t - \theta)$$

Posant

$$n = \frac{2\pi}{T} = \text{vitesse angulaire moyenne}$$

il vient

$$u - c \sin u = n (t - \theta)$$

C'est l'équation de Képler.

D'après la nature même du problème, cette équation transcendante doit avoir une racine convenable et une seule.

Cette valeur de u étant trouvée, il s'agit de calculer l'anomalie vraie V et le rayon vecteur $SM = r$.

On a

$$M'N = a \sin u, \quad MN = r \sin V = M'N \frac{b}{a}$$

$$CN = a \cos u = c + r \cos V.$$

De là

$$r \cos V = a (\cos u - c),$$

$$r \sin V = a \sqrt{1 - c^2} \sin u$$

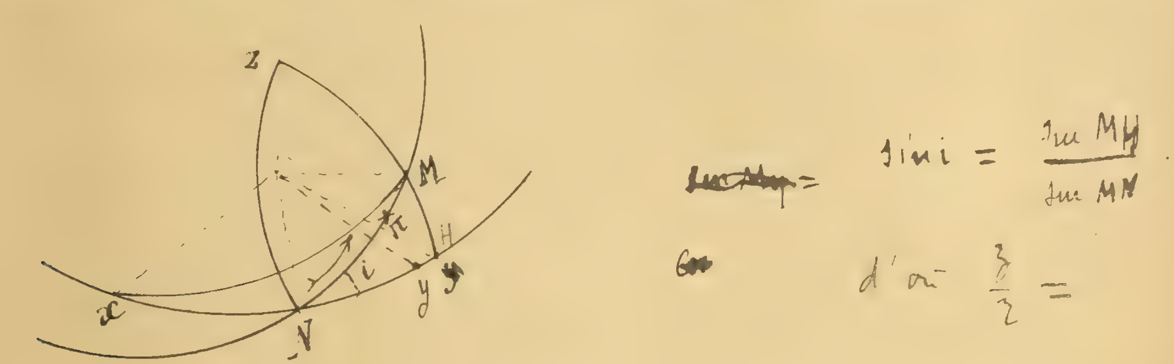
Outre l'anomalie vraie PSM et l'anomalie excentrique PCM', on distingue encore l'anomalie moyenne $n(t-\theta)$; elle est proportionnelle à l'aire décrite et croît à partir de 0 au périhélie.

On aura ensuite, ϖ étant l'angle de la ligne AP (appelée souvent ligne des apsides) avec la direction S♈ origine des longitudes, c'est-à-dire la longitude du périhélie de la planète.

Longitude L de la planète $= v + \varpi$.

La position de la planète à l'époque t sera donc calculée.

Considérons ensuite le cas d'une planète dont l'orbite est inclinée sur l'écliptique; prenons ce plan pour plan des x et y, l'axe des x étant dirigé vers le point ♈ d'une époque déterminée; ce sera l'origine des longitudes. Prenons



une sphère de rayon arbitraire ayant son centre au Soleil; l'écliptique la coupera suivant le grand cercle x y; le plan de l'orbite la coupera suivant le grand cercle N π, π répondant au périhélie.

Le plan de l'orbite sera déterminé par l'arc $xN = \Omega$ longitude du noeud ascendant (c'est celui des deux points d'intersection de l'orbite avec l'écliptique pour lequel la planète monte dans l'hémisphère boréal de l'écliptique) et par l'inclinaison i du plan sur l'écliptique.

La position de l'orbite dans son plan sera ensuite déterminée par l'arc $N\pi = xN + N\pi - xN$. L'usage étant de compter les longitudes toujours à partir de ♈ la somme des deux arcs.

$xN + N\pi$ est la longitude ϖ du périhélie

de sorte que

$$N\pi = \varpi - \Omega$$

En écrivant la formule fondamentale pour les triangles xMN, yMN, zMN, on a pour les cosinus des angles que le rayon vecteur de la planète fait avec les axes Ox, Oy, Oz.

$$Ox : \frac{x}{r} = \cos\Omega \cos(\varpi - \Omega + v) - \sin\Omega \sin(\varpi - \Omega + v) \cos i$$

$$Oy : \frac{y}{r} = \sin\Omega \cos(\varpi - \Omega + v) + \cos\Omega \sin(\varpi - \Omega + v) \cos i$$

$$Oz : \frac{z}{r} = \sin(\varpi - \Omega + v) \sin i$$

les coordonnées x, y, z seront connues du moment qu'on aura calculé r et v, calcul qui s'exécute comme il a été dit ci-dessus connaissant les quantités T, a, e, θ.

Donc le calcul de la position d'une planète dépend des 7 quantités suivantes

- Ω longitude du noeud ascendant de l'orbite sur l'écliptique ;
- i inclinaison du plan de l'orbite ;
  Ces deux quantités définissent la position du plan de l'orbite ;
- ϖ longitude du périhélie ;
  Elle définit l'orientation de l'orbite dans son plan.
- a demi-grand axe ;
- e excentricité ;
  Ces deux quantités définissent la grandeur et la forme de l'orbite ;
- θ époque du passage de la planète au périhélie ;
- T durée de la révolution sidérale.

Ces deux dernières quantités fixent, l'une un point de départ pour la description de l'orbite, l'autre la loi de cette description, loi qui résulte de l'équation de Képler.

$$u - e \sin u = \frac{2\pi}{T}(t - \theta) = n(t - \theta) = \text{anomalie moyenne}$$

On appelle les 7 quantités ci-dessus les éléments de l'orbite d'une planète.

10. Calcul des coordonnées géocentriques. — Il est facile de passer des coordonnées héliocentriques x, y, z de la

planète aux coordonnées géocentriques, et de là aux coordonnées L, β ou Ɽ δ de la planète.

Soient en effet ξ, η, ζ les coordonnées héliocentriques de la Terre pour l'époque considérée et, par rapport aux mêmes axes, x', y', z' les coordonnées géocentriques de la planète.

On a

$$x' = x' - \xi$$

$$y' = y - \eta$$

$$z' = z - \zeta$$

x, y, z sont supposés calculés. R et T étant les coordonnées héliocentriques de la Terre, on a

$$\xi = R \cos T$$

$$\eta = R \sin T$$

$$\zeta = 0$$

Soient L, β la longitude et la ~~co~~latitude géocentriques de la planète, Δ sa distance à la Terre, on aura

$$x' = \Delta \cos\beta \cos L$$

$$y' = \Delta \cos\beta \sin L$$

$$z' = \Delta \sin\beta$$

d'où l'on déduira les valeurs de L, β, Δ ; si l'on veut Ɽ et δ, on emploiera les relations entre les deux systèmes de coordonnées (Chapitre IV, n° 11). On peut ainsi calculer pour une suite d'époques les positions théoriques.

La comparaison des coordonnées calculées Ɽ δ avec les coordonnées observées permet de vérifier ou de rectifier les valeurs admises pour les éléments des orbites.

11. Variation des coordonnées dues à la précession. — Dans ce qui précède, l'origine des longitudes répond à un équinoxe déterminé.

Or les coordonnées d'observation $R\ \delta$ se rapportent d'après leurs définitions à la position de γ et à l'obliquité ω qui ont lieu au moment de l'observation.

La variation des coordonnées à cause de la précession s'obtient comme il a été indiquée, pour les étoiles (chap. V, n° 15).

12. Développement en série de la longitude et du rayon vecteur d'une planète. Lorsque l'excentricité e de l'orbite est supposée très petite, au lieu de résoudre l'équation de Képler qui donne l'anomalie excentrique u puis de calculer v et r (ce chapitre n° 9) on emploie des développements en séries.

La loi des aires donne l'équation différentielle ($v = L - \varpi$)

$$\frac{1}{2} r^2 dv = \frac{1}{2} C dt$$

on doit avoir, en prenant l'aire décrite dans une révolution entière T,

$$\pi a b = \frac{1}{2} C T, \quad C = \frac{2\pi}{T} a b = n a^2 \sqrt{1-e^2}$$

Remplaçant r par

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(L-\varpi)}$$

il viendra

$$dL = (1-e^2)^{-\frac{3}{2}} \left[1 + 2e\cos(L-\varpi) + e^2\cos^2(L-\varpi)\right] n\, dt$$

La forme de l'équation différentielle montre que la constante arbitraire peut être ajoutée au temps t.

Profitons de ce que e est supposé petit et intégrons par approximations successives, méthode très souvent employée dans les applications.

On fait d'abord $e = 0$ dans le second membre, il en résulte

$$dL = n\, dt \qquad L = nt;$$

On porte ensuite cette première valeur à la place de L dans le second membre; on fait $e^2 = e^3 = . = 0$; mais on garde les termes en e; il en résulte

$$dL = \left[1 + 2e\cos(nt-\varpi)\right] n\, dt$$

d'où

$$L = nt + 2e \sin (nt - \varpi).$$

Si on s'arrête là et si on remplace nt par $L_0 + nt$, L_0 étant une constante arbitraire, on retrouve la loi de la longitude donnée par Hipparque.

Dans l'approximation suivante, on calculerait le second membre en faisant $e^3 = e^4 = .. = 0$; mais on garderait les termes en e^2 ; il viendrait

$$L = L_0 + nt + 2e \sin (L_0 + nt - \varpi) + \frac{5}{4} e^2 \sin 2 (L_0 + nt - \varpi) + \ldots$$

et ainsi de suite.

L'ensemble des termes suivant $L_0 + nt$ s'appelle comme on l'a déjà dit, équation du centre ; elle est nulle si $e = 0$.

Pour développer le rayon vecteur en série, on remplace L par le développement ci-dessus ; on trouve

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos (L_0 + nt - \varpi) + \ldots.$$

Remarque I — $L_0 + nt$ est ce que les astronomes appellent la longitude moyenne de la planète. $L_0 + nt - \varpi$ est l'anomalie moyenne (Ce chapitre N° 9) $= n(t - \theta)$. On a donc

$$L_0 = -n\theta + \varpi ;$$

on peut donc remplacer l'élément θ par L_0 longitude moyenne pour $t = 0$; c'est ce qu'ont fait souvent les astronomes pour les planètes.

Remarque II — Il est intéressant de comparer les termes principaux des développements de L et r.

$$L = L_0 + nt + 2e \sin (L_0 + nt - \varpi)$$

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos (L_0 + nt - \varpi)$$

à ceux que fournirait la théorie de l'excentrique (Chap. IV, N° 8)

En appelant a le rayon du grand cercle, la distance $TC = d = 2ae$

$$L = L_0 + nt + 2e \sin (L_0 + nt - \varpi)$$

$$r = TS = \sqrt{a^2 - 2ad \cos (L_0 + nt - \varpi) + d^2}$$

$$r = a \left[1 - 2e \cos (L_0 + nt - \varpi) \right]$$

Pour les valeurs très petites de e, le désaccord est faible, par exemple pour $e = \frac{1}{60}$, (Terre).

Mais s'il s'agit de Mars, $e = \frac{1}{10}$ environ et $2e = \frac{1}{5}$.
Il est bien plus facile alors de voir quelle théorie s'accorde avec les observations. En étudiant le mouvement de Mars, qui sauf Mercure, a l'excentricité de beaucoup la plus forte. Képler avait plus de chances de trouver les lois véritables du mouvement.

Troisième loi de Képler

13. Les carrés des temps des révolutions des planètes sont proportionnels aux cubes des grands axes. Les deux premières lois de Képler ont été publiées en 1609 (astronomia nova de Stella Martis) Mais on doit à Képler une loi encore plus remarquable à laquelle il parvint après bien des tentatives infructueuses (Harmonices Mundi 1619). Il eut l'idée de comparer les durées des révolutions des planètes avec les puissances successives de leurs distances moyennes au Soleil.
L'accord des durées des révolutions rapportées à celle de la Terre avec les puissances $\frac{3}{2}$ des distances moyennes rapportées à celle de la Terre est extrêmement approché

Planètes	Durée des révolutions	$a^{\frac{3}{2}}$
Mercure	0,2408	0,241
Vénus	0,6152	0,615
La Terre	1,0000	1,000
Mars	1,881	1,874
Jupiter	11,863	11,86
Saturne	29,457	29,46

Képler en a conclu que les carrés des temps des révolutions sont exactement entre eux comme les cubes des moyennes distances des planètes au Soleil ou comme les cubes des grands axes de leurs orbites elliptiques. Comme les temps des révolutions étaient bien connus à son époque par la compa-

raison des observations de Tycho-Brahé avec celles des Grecs 2000 ans auparavant, il a déduit de cette loi avec une grande précision les rapports des grands axes des ellipses planétaires.

Képler reconnut la même loi dans le système des satellites de Jupiter (découverts en 1610 par Galilée); elle s'étend à tous les systèmes de satellites.

Il résulte de la 3e loi de Képler que, dans le système solaire, en particulier, les éléments T et a liés par la relation $\frac{a^3}{T^2}$ = Const. ne sont pas indépendants et que le nombre des éléments d'une orbite se réduit à 6.

La troisième loi de Képler permet, si l'on suppose pour plus de simplicité, les orbites d'un système circulaires et couchées sur l'écliptique de construire une figure semblable au système considéré. Il suffit d'obtenir la longueur d'une des distances en fonction d'une unité connue telle que le rayon de la terre pour que toutes les autres distances soient connues. Il ne restera plus, en d'autres termes, qu'à fixer la valeur de l'échelle du plan.

Képler a construit (1627) les Tables des mouvements de toutes les planètes, Mercure, Vénus, la Terre (dont les Tables ne diffèrent pas au fond de celles du mouvement apparent du Soleil ...) d'après les lois trouvées par lui. Elles ont été le fondement de tous les calculs astronomiques pendant un siècle, de même que les Tables de Le Verrier servent aujourd'hui pour calculer les nombres de la Connaissance des Temps.

Chapitre VIII.

Dimensions absolues du système solaire. Mesure des parallaxes.

1. La troisième loi de Képler permettant de déterminer les distances de toutes les planètes au soleil en fonction de l'une d'elles, il reste à évaluer l'une des distances par exemple la distance moyenne de la Terre au soleil, en fonction d'une longueur connue telle que le rayon équatorial de la Terre déduit des mesures géodésiques.

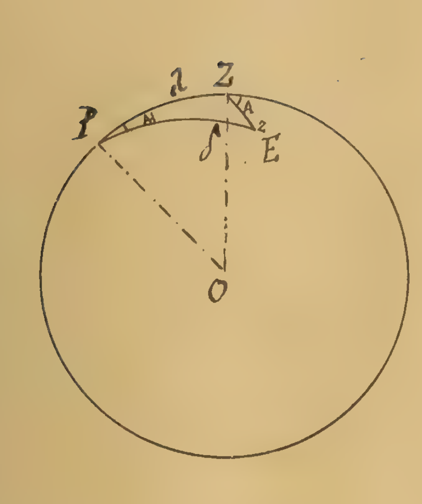
On n'a rien pu obtenir de précis dans les évaluations des distances des astres très éloignés avant l'invention des lunettes à micromètres et des instruments de mesure du temps.

En effet, les distances sont déduites, suivant la méthode qui s'offre la première, des effets de parallaxes sur les coordonnées des astres ; ces effets sont le plus souvent très petits, et les mesures différentielles avec un micromètre s'imposent.

Dans ce qui suit, pour simplifier les calculs, on néglige l'aplatissement de la Terre.

2. Formules de parallaxe en ascension droite et en distance polaire. On a remarqué (chapitre III, n° 13) que l'effet de la parallaxe ne changeait pas l'azimut mais augmentait la distance zénithale z de l'angle $p = P \sin z$, où $P = \frac{r}{D}$.

Pour avoir l'effet de la parallaxe sur les coordonnées $Æ\ \delta$, par exemple, il suffit de différentier les relations fondamentales formées par le triangle de position : pôle, zénith, étoile.



$$\cos\delta = \cos z \cos\lambda - \sin z \sin\lambda \cos A$$
$$\sin\delta \sin AH = \sin z \sin A$$
$$\sin\delta \cos AH = \sin\lambda \cos z + \sin z \cos\lambda \cos A$$

On tire des deux dernières

$$\frac{\cos AH}{\sin AH} = \frac{\cos z \sin\lambda + \sin z \cos\lambda \cos A}{\sin z \sin A}$$

et en différentiant par rapport à AH et z ($dA = 0$)

$$-\frac{d\,AH}{\sin^2 AH} = -\frac{\sin\lambda}{\sin A} \cdot \frac{dz}{\sin^2 z}$$

$$d\,AH = \frac{\sin^2 AH}{\sin A \sin^2 z} \sin\lambda\, dz = \frac{\sin^2 AH}{\sin\delta \sin AH \sin z} \sin\lambda\, dz$$

A cause de

$$H_\star = R + AH = (R + dR) + (AH + d\,AH)$$

d'où

$$dR + d\,AH = 0,$$

et de

$$dz = P \sin z,$$

il vient

$$dR = -P \sin\lambda \frac{\sin AH}{\sin\delta}$$

Pour la parallaxe en distance polaire, la relation

$$\cos\delta = \cos z \cos\lambda - \sin z \sin\lambda \cos A$$

différenciée, en faisant

$$dz = P \sin z,\ dA = 0,$$

donne

$$-\sin\delta\, d\delta = -(\sin z \cos\lambda + \cos z \sin\lambda \cos A) P \sin z,$$

l'expression entre parenthèses correspond d'après ce qu'on a vu, à la projection du côté δ du triangle de position sur le côté z; en effet

$$\sin\delta \cos E = \sin z \cos\lambda - \sin\lambda \cos z \cos(180° - A);$$

donc

$$\sin\delta\, d\delta = \sin\delta \cos E . P \sin z.$$

Moyennant l'introduction de l'angle E (appelé angle parallactique) les formules pour la parallaxe en $\mathcal{R}$ et δ deviennent ainsi

$$d\mathcal{R} = -P \sin z \frac{\sin E}{\sin \delta},$$

$$d\delta = P \sin z \cos E.$$

3. Application des formules précédentes.

Les formules précédentes sont d'un usage fréquent. Toutes les fois qu'on observe avec l'équatorial un astre à parallaxe sensible, planète ou comète, la règle est d'indiquer les corrections de parallaxe.

Indiquons en particulier ce qu'on a fait pour obtenir la parallaxe, de quelques corps célestes. D'après la loi harmonique de Képler il suffit de connaître une seule parallaxe pour avoir toutes les autres.

L'effet de la parallaxe en $\mathcal{R}$ étant maximum en un lieu donné, pour une valeur de δ, quand $H = \pm 90°$, à 6^h du méridien, le matin et le soir, supposons que l'on observe la planète Mars dans une station, au moyen de l'équatorial à ces deux instants de la journée, en notant les différences des heures des passages de la planète et d'une étoile de comparaison (chapitre V, n°14) à cause de la distance presque infinie de l'étoile, sa parallaxe peut être regardée comme nulle. La différence des résultats, le matin et le soir, fournira une équation de condition pour déterminer P. $P = \frac{r}{D}$. D ne sera pas le même dans toute la série d'observations; mais les distances D s'exprimeront en fonction d'une seule d'après la loi harmonique de Képler. On traitera par la méthode des moindres carrés l'ensemble des mesures faites aux époques les plus favorables.

C'est la méthode dite de la parallaxe diurne, parce que la parallaxe est ici produite par le mouvement diurne.

La mesure des différences de distances polaires de Mars et d'étoiles de comparaison avec l'équatorial dans des observatoires de colatitudes très différentes, a conduit pareillement à la détermination de la parallaxe P.

On a également fait usage des observations au cercle méridien. Dans ce cas

$$d\delta = P \sin z.$$

La différence des distances polaires de la planète et d'une étoile de comparaison, mesurée dans deux stations par

exemple appartenant à un même méridien, au moyen du micromètre, est

$$P \sin z - P \sin z' ;$$

z' est la distance zénithale méridienne dans la seconde station de colatitude λ'. Alors

$$P \sin z - P \sin z' = P \sin(\delta - \lambda) - P \sin(\delta - \lambda'),$$

$$= 2P \sin \frac{\lambda' - \lambda}{2} \cos\left(\delta - \frac{\lambda + \lambda'}{2}\right).$$

La détermination de P sera d'autant plus précise que le coëfficient de P sera plus grand ; il convient que les stations soient de colatitude λ, λ' aussi différentes que possible.

Une fois P déterminé la distance D de l'astre à la terre résultera de la formule

$$P = \frac{r}{D} .$$

Ces méthodes ont été appliquées sous la forme indiquée à la Lune. On a trouvé $P = 57'$, $D = 60\,r$.

Elles ont été fréquemment appliquées à Mars. En 1672, Picard et Rœmer à Paris, Richer à Cayenne faisaient des observations correspondantes. Cassini employait en même temps la méthode de la parallaxe diurne. Le résultat fut que la parallaxe horizontale P était pour Mars d'environ 25".

Les 2 satellites de Mars ont été découverts lors de l'opposition de 1877.

4. Méthode des passages de Vénus sur le Soleil proposée par Halley. Petite planète Eros. On utilise dans cette méthode le cas où Vénus étant en conjonction interne se projette sur le disque du Soleil et traverse son disque suivant une corde, l'entrée et la sortie de la planète donnant lieu aux phénomènes des contacts des disques, susceptibles, croyait Halley, d'être observés avec une grande précision.

Si l'on a calculé les heures des contacts pour un observateur placé au centre de la Terre, les formules de parallaxe, trop longues pour être développées ici, feront connaître les heures des phénomènes pour un observateur placé en un lieu quelconque de la Terre ; les différences d'heure pour les stations

mutuelles dépendent des deux rapports du rayon de la Terre, à la distance TS de la Terre au Soleil et à celle TV de la Terre à Vénus, mais à cause de la 3e loi de Képler qui fait connaître les rapports des distances TS et VS = TS - TV, du premier rapport seulement. On pourra donc le déterminer d'après les différences d'heures mesurées.

On a attribué une grande importance à ces observations. On ne se doutait pas qu'au contact des bords des deux disques l'un brillant, l'autre noir (celui de Vénus) il se produisait des phénomènes secondaires rendant l'observation un peu incertaine.

Les passages de Vénus sur le Soleil sont des espèces d'éclipses partielles du Soleil par la planète Vénus, qui se produisent lorsque la planète traverse l'écliptique (sur laquelle le plan de l'orbite est incliné de 3°½), à l'une de ses conjonctions avec le Soleil.

Les passages reviennent par couples à 8 ans d'intervalle comme l'indique le tableau suivant:

1761	5 Juin
1769	3 "
1874	9 Décembre
1882	6 "
2004	8 Juin
2012	6 "

Le 13 Août 1898, on a trouvé presque simultanément, à l'aide de la photographie, à Nice et à Berlin une petite planète (Eros) se rapprochant beaucoup de la Terre (elle pénètre dans la région comprise entre Mars et la Terre). Elle sera d'une grande utilité pour la détermination de la parallaxe.

5 - Conclusions - Les mesures récentes assignent à la parallaxe horizontale du Soleil $P = \frac{r}{D}$ une valeur voisine en secondes de 8",81. On peut adopter pour D en chiffres ronds.

$$D = 24000\,r.$$

Les dimensions absolues du système solaire sont dès lors fixées.

Chapitre IX.

La Lune satellite de la Terre.

1_ La Lune était considérée par Ptolémée comme une planète. Depuis Copernic, elle est regardée comme un satellite accompagnant la Terre dans son mouvement de révolution autour du Soleil.

Elle est beaucoup plus petite que la Terre, et comparée avec les autres corps célestes elle est presque négligeable; mais sa proximité relative de la Terre fait qu'elle l'emporte pour nous en importance sur tous les astres, le Soleil excepté.

De la Lune dépendent les phénomènes des phases, des éclipses, des marées. Elle remplace en quelque sorte le Soleil pendant la nuit. Elle sert aux voyageurs pour déterminer leurs longitudes si les chronomètres font défaut. Au point de vue théorique, la Lune qui a joué un rôle capital dans l'établissement par Newton de la loi d'attraction soumet cette loi à un contrôle incessant, en la forçant à expliquer, dans leurs moindres détails toutes les irrégularités de sa route.(1)

2_ Etude du mouvement de la Lune. Eléments de son orbite_ La Lune étant un satellite de la Terre, et les lois de Képler s'appliquant aux satellites considérés par rapport à la planète qu'ils accompagnent comme aux planètes tournent autour du Soleil, la Lune doit se mouvoir dans une ellipse dont la Terre occupe un des foyers; les aires balayées par le rayon vecteur doivent être proportionnelles aux temps. Quant à la 3ième loi de Képler, elle n'a pas ici d'application puisqu'il n'y a pas d'autre satellite à la Terre que la Lune, par suite, pas de rapports de durées de révolutions ou de distances moyennes à considérer.

(1) Tisserand. Notice sur la Lune. Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1892.

Il y a donc lieu pour définir la position de la Lune à un instant quelconque de connaître les 7 éléments de l'orbite ; c'est-à-dire

Ω la longitude du nœud ascendant de l'orbite sur l'écliptique,

i l'inclinaison du plan de l'orbite sur l'écliptique.

Ces deux quantités définissent la position du plan de l'orbite.

ϖ la longitude du périgée ou point de l'orbite le plus près de la terre. Elle définit l'orientation de l'orbite dans son plan.

a le demi grand axe de l'orbite,

e l'excentricité de l'orbite.

Ces deux quantités définissent la grandeur et la forme de l'orbite.

La durée T de la révolution sidérale.

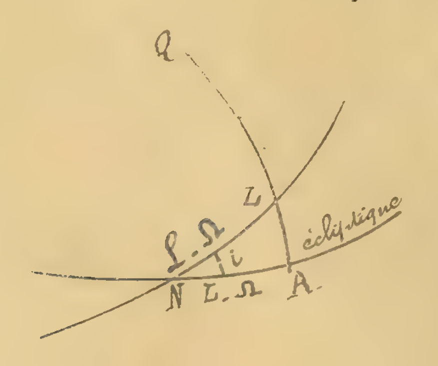
La longitude moyenne L_0 pour $t = 0$.

L'étude des mouvements de la Lune peut se faire comme pour le Soleil, en observant jour par jour à la lunette méridienne et au cercle mural les coordonnées $Æ$ et δ de l'astre et corrigeant δ de la réfraction et de la parallaxe ; pour la Lune la parallaxe est beaucoup plus forte que la réfraction. Les observations portent presque toujours sur un seul bord ; mais la connaissance du diamètre apparent permet d'en déduire le centre.

On trouve les $Æ$ croissantes, de 50 minutes environ d'un jour à l'autre. Les δ sont comprises entre deux limites peu différentes de celles qu'on a trouvées avec le Soleil, la trajectoire de la Lune s'écartant peu de l'écliptique.

Les coordonnées géocentriques $Æ$ et δ sont ensuite transformées en coordonnées écliptiques L et β (Chapitre IV, n° 11) plus appropriées à l'étude du mouvement des planètes et des satellites.

On s'assure que les positions successives de la Lune sur la sphère céleste, dans l'intervalle d'une révolution, sont sensiblement sur un grand cercle.



On détermine le nœud ascendant de l'orbite lunaire dont la longitude est Ω et l'inclinaison i du plan de l'orbite sur l'écliptique, de la même manière que le point γ et l'obliquité ω (Chapitre IV, n° 6) dans le cas du Soleil. Ensuite on considère le développement de la longitude écliptique analogue au développement de l'$Æ$ du Soleil (Chapitre IV, n° 13).

Soit N le nœud ascendant de l'orbite lunaire NL, L une position de la Lune, Q le pôle de l'écliptique. On a dans le triangle LNA

$$\cos i = \frac{tg\,NA}{tg\,NL},\ tg\,NA = \cos i\, tg\,NL,\ tg(L - \Omega) = \frac{1 - tg^2\frac{i}{2}}{1 + tg^2\frac{i}{2}}\, tg(\mathcal{L} - \Omega).$$

$$L - \Omega = \mathcal{L} - \Omega - tg^2\frac{i}{2}\sin 2(\mathcal{L} - \Omega)\ldots$$

avec

$$\mathcal{L} = L_0 + nt + 2c\sin(L_0 + nt - \varpi)\ldots$$

De là

$$L = L_0 + nt + 2c\sin(L_0 + nt - \varpi) - tg^2\frac{i}{2}\sin 2(L_0 + nt - \Omega) + \ldots$$

D'abord le nombre n est déduit de la détermination de la révolution sidérale ou de la révolution synodique de la Lune.

On trouve pour la durée de la révolution sidérale de la Lune, ou temps nécessaire pour qu'elle revienne au même point du Ciel $27^j\frac{1}{3}$ ce qui donne pour le mouvement moyen de la Lune dans un jour moyen (unité de temps adoptée): $13°10'35''$.

De même que pour les planètes, la durée de la révolution synodique ou l'intervalle entre deux conjonctions ou deux oppositions de la Lune et du Soleil, qu'on appelle encore lunaison, permet de conclure la durée de la révolution sidérale de la Lune en fonction de la durée de la révolution du Soleil.

Soient T et T' les durées de révolution de la Lune et du Soleil, n et n' leurs vitesses angulaires en un jour moyen.

La vitesse angulaire de la Lune relativement au Soleil sera $n - n'$ ou $\frac{360°}{T} - \frac{360°}{T'}$ et la durée de la révolution synodique Σ aura pour valeur

$$\Sigma = \frac{360°}{n - n'} = \frac{TT'}{T' - T}$$

On trouve $\Sigma = 29^j{,}53$ ou $29^j\frac{1}{2}$ (à peu près)

Si la Lune était dans l'écliptique exactement aux époques des conjonctions et des oppositions les deux astres seraient en ligne droite avec la Terre; il y aurait des éclipses; mais l'orbite de la Lune fait un angle d'environ 5° avec l'écliptique; il n'y a pas éclipse à chaque conjonction ou opposition.

Celles-ci sont définies d'une manière générale par la condition que les longitudes géocentriques du Soleil et de la Lune soient les

mêmes, dans le cas de la conjonction, ou différent de 180°, dans le cas de l'opposition.

Quant aux autres éléments, la comparaison des Longitudes L déduites des observations avec les longitudes théoriques.

$$L = L_0 + nt + 2e \sin(L_0 + nt - \varpi) - tg^2 \frac{i}{2} \sin 2(L_0 + nt - \Omega) + ..$$

fournit, n étant déjà déterminé, les équations de condition pour avoir L_0, e, ϖ ; i et Ω seront obtenus au moyen des latitudes β.

Le demi-grand axe a de l'ellipse lunaire est le septième élément à connaître pour définir complètement l'orbite. On le mesure directement par les méthodes indiquées dans le chapitre VIII.

On a a = 60 rayons terrestres (environ)

3 – Si l'on fait des déterminations des sept éléments

$$\Omega, i, T, L_0, e\ \varpi \text{ et } a$$

pendant quelques années, on trouve que i, T, e, a, L_0 peuvent être regardés comme des quantités constantes ; i, e, a oscillent un peu autour des valeurs

$$i = 5°, e = \frac{1}{18}, a = 60\,r.$$

Mais les éléments Ω et ϖ varient assez rapidement.

La variation du périgée (qui se déplace dans le sens direct et fait le tour du ciel en 10 ans environ) est importante au point de vue théorique, mais elle ne change pas d'une manière essentielle la trajectoire décrite.

Quant au mouvement du nœud ascendant de la Lune, qui rétrograde sur l'écliptique, comme le point γ, mais avec une vitesse beaucoup plus rapide, puisqu'il fait le tour du ciel en 18 ans $\frac{2}{3}$, il en résulte qu'à la fin d'une révolution sur la sphère céleste, la Lune ne repasse pas exactement par le point de départ : la courbe qu'elle décrit sur la sphère ne se ferme pas ; elle est formée de spires successives sensiblement planes et également inclinées de 5° environ sur l'écliptique, analogues aux spires d'un fil qu'on enroulerait sur une pelote sphérique ; ces spires successives couvrent entièrement une zône de 5° de largeur de part et d'autre de l'écliptique.

On peut remarquer qu'il y a une certaine analogie entre la rétrogradation du nœud de la Lune et le phénomène de la précession des équinoxes. Mais le mouvement est beaucoup plus marqué dans le premier cas.

Le mouvement des nœuds de la Lune est aisé à reconnaître en voyant la Lune éclipser une des étoiles Régulus par exemple (α du Lion) situées sur l'écliptique. Cette étoile étant dans l'écliptique, la Lune y est aussi ; elle est donc dans son nœud. Les spires de l'orbite s'écartent ensuite de ce point mais pour y repasser après une intervalle de 18 ans $\frac{2}{3}$.

Phases de la Lune et Eclipses.

1_ Distance zénithale méridienne de Lune. Durée de la présence de la Lune sur l'horizon pendant la nuit.

La Lune éclaire la Terre pendant la nuit, surtout quand elle est pleine et élevée dans le Ciel.

Quand elle est pleine, elle est en opposition ; elle doit occuper à peu près le point de l'écliptique où le Soleil sera six mois après.

Il en résulte que dans l'été où le Soleil est très longtemps sur l'horizon et très élevé dans le Ciel, la Lune se comportera comme le Soleil en hiver : elle sera très basse et ne restera que peu de temps sur l'horizon.

Au contraire, pendant les nuits d'hiver, la Lune sera très élevée dans le Ciel et restera très longtemps sur l'horizon.

Il y a plus : à cause de l'inclinaison de 5° de l'orbite des noeuds, l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'équateur pourra monter à

$23^\circ\frac{1}{2}$ inclinaison de l'écliptique sur l'équateur

$+5^\circ$ inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique

$= 28^\circ\frac{1}{2}$

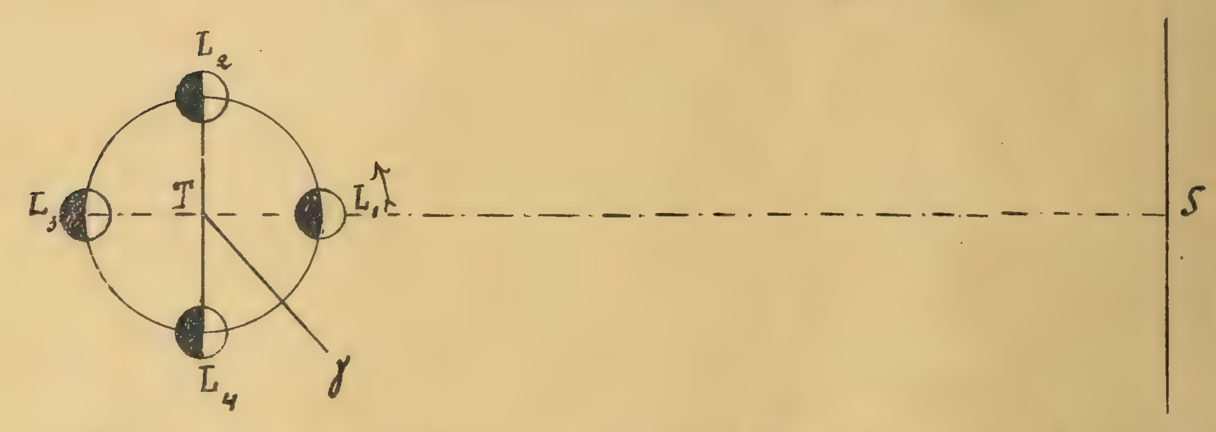
et s'abaisser jusqu'à $-23^\circ\frac{1}{2} - 5^\circ = -28^\circ\frac{1}{2}$; les valeurs limites ayant lieu quand la ligne des noeuds coïncidera avec la ligne des équinoxes.

Les distances polaires de la Lune seront donc comprises entre

$$90^\circ - 28^\circ\frac{1}{2} = 60^\circ\frac{1}{2} \text{ et } 90^\circ + 28^\circ\frac{1}{2} = 118^\circ\frac{1}{2}.$$

5. Phases de la Lune. On a vu que l'orbite de la Lune faisait un angle d'environ 5° avec l'écliptique; l'inclinaison est donc petite. L'orbite est presque circulaire ($e = \frac{1}{18}$); de sorte qu'en prenant pour plan du tableau le plan de l'écliptique, l'orbite lunaire peut être figurée par un cercle ayant la Terre pour centre. Le rayon du cercle doit être très petit relativement à la distance de la Terre au Soleil, puisque

$$\frac{\text{Distance Terre-Lune}}{\text{Distance Terre-Soleil}} = \frac{60r}{24000r} = \frac{1}{400}.$$



La Lune n'est pas un astre lumineux par lui-même, elle est éclairée par le Soleil. A cause de la grande distance du Soleil à la Lune, il y a toujours un hémisphère de la Lune éclairé par le Soleil, l'autre étant dans l'ombre et obscur. Ces deux hémisphères sont vus de la Terre de différentes façons dans l'intervalle d'une révolution synodique ($29^j\frac{1}{2}$); c'est ce qui donne naissance aux phases.

En L_1 il y a conjonction de L et S nouvelle Lune

En L_2 il y a quadrature ($L_2TS = 90°$) premier quartier

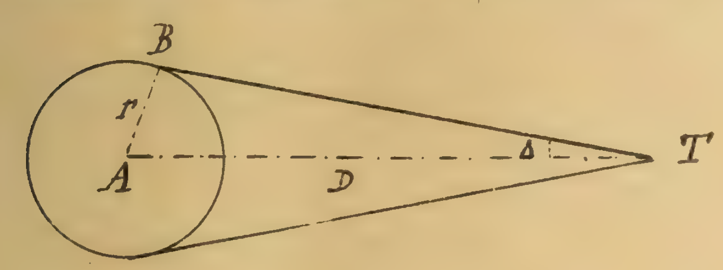
En L_3 il y a opposition . . . . pleine Lune

En L_4 il y a quadrature ($L_4TS = 90°$) dernier quartier

La Lune est dite croissante de la nouvelle Lune à la pleine Lune; ensuite elle est décroissante. Elle a la forme d'un D quand elle est croissante d'un C quand elle décroit.

La succession des phases de la Lune a naturellement servi aux premiers hommes pour compter le temps; mais le Calendrier lunaire est sans rapport avec les saisons déterminées par le mouvement apparent du Soleil.

6. Dimensions du Soleil et de la Lune. On appelle diamètre apparent d'un astre tel que le Soleil ou la Lune l'angle sous lequel on l'aperçoit. Soit Δ le demi-diamètre apparent r le rayon de la sphère de l'astre



$$\sin \Delta = \frac{r}{D}$$

Si l'on met un indice s aux quantités qui se rapportent au Soleil, un indice l aux quantités qui se rapportent à la Lune, il vient

$$(1)\ \sin \Delta_s = \frac{r_s}{D_s} \qquad (2)\ \sin \Delta_l = \frac{r_l}{D_l}$$

On sait que

$$D_s = 400\, D_l \text{ (à peu près)}$$

On a trouvé par les observations que les valeurs moyennes de Δ_s et Δ_l étaient à peu près égales toutes les deux à 16'

$$(3)\ \sin 16' = \frac{r_s}{D_s} = \frac{r_l}{D_l} \qquad (4)\ \frac{r_s}{r_l} = \frac{D_s}{D_l} = 400$$

D'autre part la valeur de la parallaxe horizontale P de la Lune est donnée par

$$(5)\ \frac{r}{D_l} = \sin P = \sin 57';$$

r est le rayon du globe terrestre.

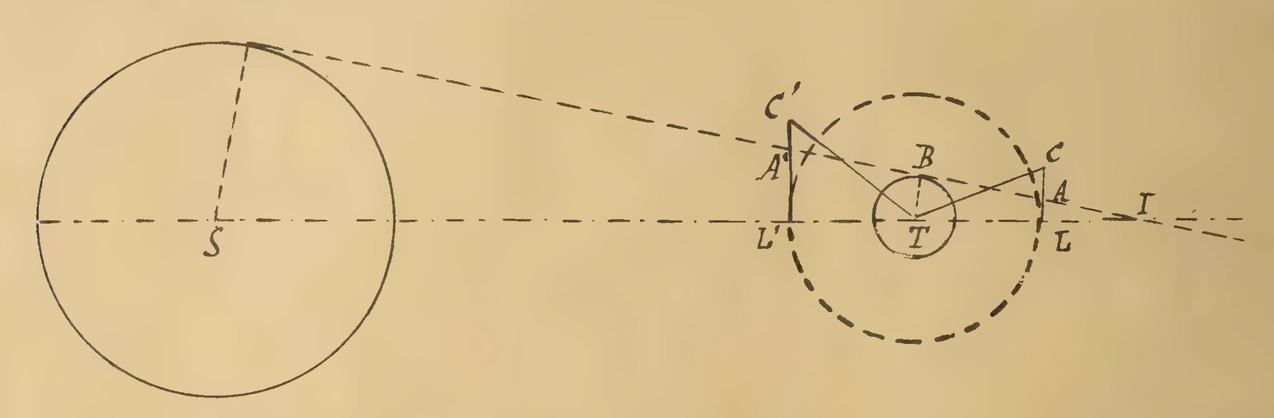
Divisant l'équation (3) par l'équation (5), terme à terme

$$\frac{r_l}{r} = \frac{\sin 16'}{\sin 57'} = \frac{16}{57} = \frac{3}{11} \text{ (à peu près)}$$

Nous ferons seulement usage des deux relations

$$\frac{r_s}{r_l} = 400, \quad \frac{r_l}{r} = \frac{3}{11}$$

7. Eclipses de Lune. — Le globe terrestre éclairé par le Soleil projette derrière lui un cône d'ombre. Quand la Lune pénètre dans ce cône, son disque n'est plus éclairé par les rayons du Soleil et s'obscurcit; il y a éclipse de Lune. Il faut évidemment que la Lune soit alors en opposition avec le Soleil.



Il est facile de calculer les dimensions du cône d'ombre. La figure représentant l'intersection des sphères du Soleil et de la Terre par un plan quelconque, passant par TS, on a

$$\frac{TI}{SI} = \frac{r}{r_s} \cdot \frac{TI}{TS} = \frac{r}{r_s - r}$$

$$TI = TS \times \frac{r}{r_s - r} = 24000\, r\, \frac{r}{r_s - r} = 24000\, r\, \frac{1}{\frac{r_s}{r} - 1}$$

Or

$$\frac{r_s}{r} = \frac{r_s}{r_e} \cdot \frac{r_e}{r} = 400 \times \frac{3}{11},$$

donc, comme

$$TI = 24000\, r\, \frac{1}{\frac{r_s}{r} - 1}$$

en négligeant l'unité devant le nombre assez grand $400 \times \frac{3}{11}$

$$TI = 24000\, r\, \frac{r}{r_s} = \frac{24000\, r}{400} \times \frac{11}{3} = 220\, r;$$

l'approximation est suffisante pour se rendre compte des phénomènes.

On voit d'abord que la Lune peut rencontrer le cône puisque le rayon de l'orbite n'est que de $60\, r$ tandis que le sommet du cône est à $220\, r$.

Calculons maintenant la largeur du cône très aigu à l'endroit où la Lune peut l'atteindre et pour cela la portion LA de la tangente à l'orbite de la Lune

$$\frac{LA}{r} = \frac{LI}{BI}, \quad LA = r\,\frac{LI}{BI};$$

on peut écrire

$$LA = r\,\frac{TI - TL}{TI} = r\,\frac{220 - 60}{220} = \frac{16}{22} = r.\frac{8}{11}$$

D'après cela, il peut y avoir éclipse totale de Lune. Et l'éclipse aura lieu pour tous les points de l'hémisphère terrestre limité par le cercle de contact du cône.

Il n'y a pas éclipse de Lune à chaque opposition parce que l'orbite de la Lune fait un angle de 5° avec le plan de l'écliptique. Pour qu'il puisse y avoir éclipse il faut que la Lune supposée en opposition soit au moins tangente au cône d'ombre, C représentant le centre de la Lune sur la tangente LA, dans le plan mené par TS normalement à l'écliptique, on a pour la tangente de la latitude β de la Lune.

$$tg\,\beta = \frac{CL}{TL} = \frac{CA + AL}{TL};$$

il faut que $CA < \frac{3}{11}\,r$; donc

$$tg\,\beta < \frac{\frac{8}{11} + \frac{3}{11}}{60r}\,r$$

$$tg\,\beta < \frac{1}{60}$$

La latitude β de la Lune au moment de l'opposition ne doit donc pas dépasser sensiblement 1° si l'on veut qu'il y ait éclipse.

Avant d'entrer dans le cône d'ombre, la Lune traverse le cône de pénombre dont les génératrices limites sont tangentes intérieurement aux deux sphères du Soleil et de la Lune. L'éclipse totale est précédée et suivie d'une éclipse partielle.

8 – Eclipses de Soleil – Le globe lunaire éclairé par le Soleil projette derrière lui un cône d'ombre qui peut rencontrer la Terre et donner naissance à une éclipse de Soleil pour certains points de la Terre. Il faut évidemment que, à ce

moment, la Lune soit en conjonction avec le Soleil, et que la latitude de la Lune ne dépasse pas une petite valeur. La tangente de la latitude (voir fig. du N° 7) est sensiblement égale à $\frac{C'L'}{TL} = \frac{\frac{14}{11}r + \frac{3}{11}r}{60r} = \frac{\frac{17}{11}}{60}$ et correspond à un angle d'environ $1^{\circ}\frac{1}{2}$.

On a trouvé pour la longueur du cône d'ombre projetée par la Terre 220 r. Si la Terre est remplacée par la Lune, dont le rayon est les $\frac{3}{11}$ de celui de la Terre, la longueur du cône sera sensiblement

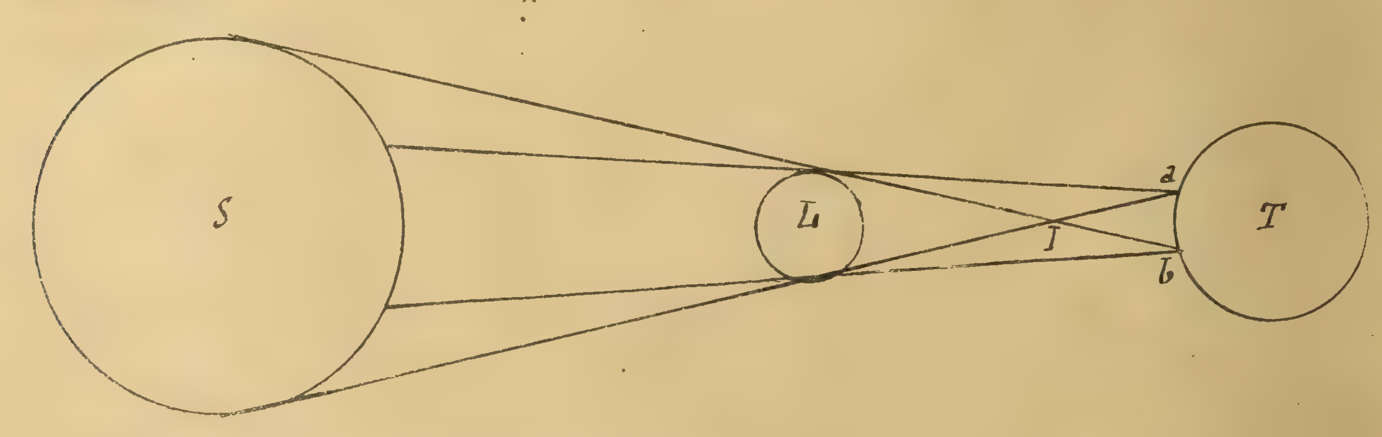
$$220r \times \frac{3}{11} = 60r.$$

Or la distance de la Terre à la Lune est de 60 r.

Il semble donc que le cône d'ombre puisse atteindre à peine la Terre. Cependant, comme l'expression obtenue n'est qu'approximative et qu'elle varie avec les distances variables de la Lune à la Terre, il peut arriver que la pointe du cône pénètre dans la Terre.

Dans ce cas, les points de la Terre qui se trouvent situés pendant quelques moments dans l'intérieur du cône d'ombre cessent de voir le Soleil; la Lune le masque complètement, il y a éclipse totale de Soleil.

Il y a éclipse annulaire en un lieu de la Terre quand ce lieu est compris dans le prolongement du cône d'ombre. Le Soleil déborde la Lune et offre l'aspect d'un anneau lumineux.



La zône a b est la zône des points où il y a éclipse annulaire.

Les éclipses totales ou annulaires sont centrales pour les points situés juste sur le prolongement de la ligne qui joint le centre de la Lune à celui du Soleil.

Il y a éclipse partielle pour les points de la Terre compris dans le cône de pénombre, dont les génératrices sont tangentes intérieurement au Soleil et à la Lune. Pour ces points là, le Soleil paraît échancré par le disque lunaire; l'échancrure est d'autant plus grande que la station considérée est plus voisine de l'ombre pure.

Il est clair que les éclipses totales ou annulaires de Soleil commencent et finissent toujours, en chaque lieu, par être partielles.

9- Période des éclipses de Lune et de Soleil; elles se reproduisent, dans le même ordre après 223 lunaisons.

Les éclipses ne peuvent arriver que quand la Lune est dans l'écliptique, ou très près de ce plan, au moment de la conjonction et de l'opposition; par conséquent lorsqu'elle est très voisine du nœud de son orbite.

On trouve que la révolution synodique du nœud c'est-à-dire le temps qui s'écoule entre deux coïncidences consécutives du Soleil avec le nœud ascendant de la Lune est 346^j,619 et que 223 lunaisons font à très peu près 19 révolutions synodiques du nœud.

$$223 \text{ lunaisons} = 6585^j,32$$

$$19 \text{ révol. synodiques} = 6585^j,76.$$

Il s'en suit que si actuellement la Lune est à son nœud, et dans la direction du Soleil, elle se retrouvera à son nœud au bout de 223 lunaisons, et sera encore à ce moment dans la direction du Soleil. Toutes les positions respectives qui auront lieu entre la Lune et le Soleil, pendant ces 223 lunaisons (18 ans environ), se reproduiront donc dans le même ordre et aux mêmes intervalles de temps pendant la période suivante. De sorte qu'on pourra prédire les phénomènes, tels que les éclipses du Soleil et de la Lune.

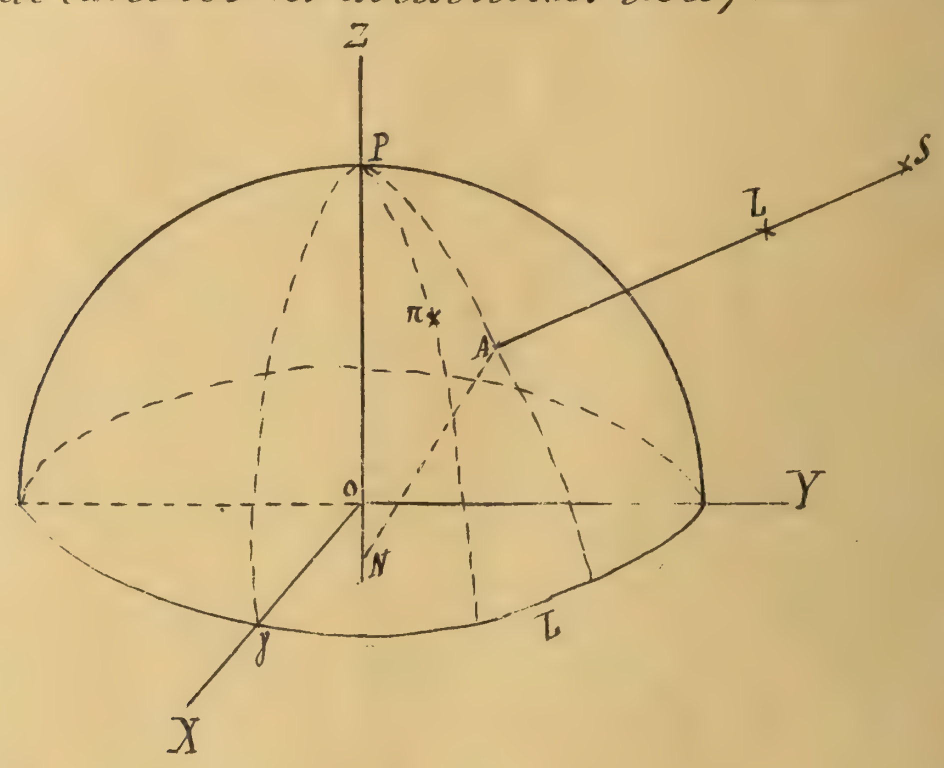
Dans cette période de 223 lunaisons connue des Chaldéens, on compte en moyenne un total de 70 éclipses dont 41 de Soleil et 29 de Lune.

10. Calcul des Eclipses. Le calcul d'une éclipse de Lune revient à chercher les époques auxquelles le globe lunaire est tangent aux deux cônes d'ombre et de pénombre.

Le calcul est plus compliqué pour une éclipse de Soleil. On se bornera au Calcul de la ligne centrale d'une éclipse de Soleil.

A un instant H_π (heure sidérale de Paris ou du point π dont le méridien terrestre est pris pour origine des longitudes), la ligne SL vient percer le globe terrestre en A.

Il s'agit de calculer les coordonnées de ce point



Rapportons les points considérés au système suivant de trois axes rectangulaires : OX est dirigé vers le point γ, OY est dans l'équateur à 90° de OX, OZ est perpendiculaire au plan de l'équateur.

A l'heure sidérale H_π, le méridien de Paris fait l'angle $\gamma P \pi = H_\pi$ avec celui du point γ, et le méridien de A fait l'angle $H_\pi + L$ avec ce même méridien Pγ, L étant la longitude du point A.

D'autre part u étant l'anomalie excentrique du point A de l'ellipse méridienne d'axes a, b le rayon du parallèle et la distance de son plan à l'équateur peuvent s'écrire

$$a \cos u \quad \text{et } b . \sin u \quad \text{(Chap. VII N° 9)}$$

Il en résulte les expressions suivantes des coordonnées du point A

$$\xi = a \cos u \cos (H_\pi + L)$$

$$\eta = a \cos u \sin (H_\pi + L)$$

$$\zeta = b \sin u$$

La Connaissance des Temps nous donne pour la même heure H_π les coordonnées du Soleil d' $\mathcal{R}'$ δ' d'où l'on déduit les coordonnées rectilignes

$$x' = d' \sin \delta' \cos \mathcal{R}'$$

$$y' = d' \sin \delta' \sin \mathcal{R}'$$

$$z' = d' \cos \delta'$$

et, pour la Lune

$$x_1 = d_1 \sin \delta_1 \cos \mathcal{R}_1$$

$$y_1 = d_1 \sin \delta_1 \sin \mathcal{R}_1$$

$$z_1 = d_1 \cos \delta_1 .$$

Dès lors, les équations de la droite SL étant

$$\frac{x - x'}{x' - x_1} = \frac{y - y'}{y' - y_1} = \frac{z - z'}{z' - z_1} = \rho$$

et celle de l'ellipsoïde terrestre

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

la substitution des valeurs x, y, z dans l'équation de l'ellipsoïde donnera une équation du second degré en ρ; on prendra celle des deux valeurs qui répond au point d'intersection A; après quoi, x, y, z étant terminés, il sera facile d'obtenir

$$v \text{ et } H_\pi + L \text{ ou } v \text{ et } L;$$

et la colatitude λ du point A en remarquant que le coefficient angulaire de la tangente au point A est :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y} = -tg\lambda = -\frac{b^2 a \cos v}{a^2 b \sin v} = -\frac{b}{a} \cot g\, v.$$

En recommençant le calcul pour d'autres heures H'_π, H''_π .... on aura les coordonnées géographiques d'une série de points pour lesquels l'éclipse sera centrale, et on pourra construire, point par point, la ligne de l'éclipse centrale.

11_ Différences entre les éclipses de la Lune et les éclipses du Soleil.

Une éclipse de Lune totale (quand la Lune est dans le cône d'ombre) partielle (quand elle est dans le cône de pénombre) a lieu pour tous les points d'un même hémisphère, tandis que pour une éclipse de Soleil la partie invisible n'est pas la même pour les différents points de la Terre.

Il y a plus d'éclipses de Soleil (41 dans une période ; (ce chapitre n° 8) que d'éclipses de Lune (29) ; mais on en voit moins en un point donné de la Terre.

Une éclipse totale de Lune peut durer 2 heures environ ; il faut que la Lune parcoure (fig. du n° 7) la distance $2(LA - \frac{3}{11}r) = 2\frac{5}{11}r = \frac{10}{11}r$; d'autre part elle fait 12° par jour dans sa révolution synodique, elle parcourt donc $\frac{12°}{57°}60r$, soit $12r$ dans 24 heures, et $\frac{10}{11}r$ dans 2 heures environ.

Une éclipse de Soleil ne peut durer dans la totalité que quelques minutes, 8 au plus. L'ombre projetée par la Lune, ayant un déplacement comparable au rayon de la Terre dans l'intervalle de 2 heures, se déplace par minute, de $\frac{6400^k}{120} = 54$ Kilomètres. L'observateur est emporté dans le même sens avec une vitesse de 450^m environ par seconde soit 27 Kilom. par minute : de sorte que l'ombre peut avoir une vitesse d'environ $54 - 27 = 27$ Kilom. par minute relativement à l'observateur. Il ne s'agit là que d'une indication pour l'ordre de grandeur.

12_ Remarques sur les éclipses de la Lune et de Soleil.

Actuellement, les éclipses ne sont pas utilisées pour fixer les périodes astronomiques : révolution synodique . . . .

Quand la Lune est éclipsée, il est possible d'observer son passage sur de petites étoiles, ce qu'on ne pourrait faire en un autre temps. Les occultations d'étoiles observées en différents endroits de la Terre fournissent le meilleur moyen d'obtenir le diamètre de la Lune, sa parallaxe et sa position dans le ciel. Les éclipses des dernières années ont été utilisées dans ce but.

Les éclipses totales de Soleil ont une importance extrême à l'heure actuelle. Elles ne durent, dans la phase de totalité, que quelques minutes, guère plus de 7 minutes; mais on ne manque pas d'envoyer des expéditions aux points les plus favorables de la ligne centrale de l'éclipse pour utiliser au mieux ces quelques minutes.

Un peu avant la totalité l'obscurité commence à se faire sentir et la température baisse.

Si l'observateur a une vue étendue du côté de l'Ouest, il voit en quelques moments l'ombre de la Lune arriver sur lui comme un violent orage, avec une vitesse effrayante.

En même temps, la couronne et les protubérances du soleil deviennent visibles ainsi que les étoiles de première grandeur.

En dehors de la détermination des heures des contacts du disque de la Lune avec celui du Soleil, l'attention peut se porter sur:

1° La recherche des planètes intra-mercurielles c'est-à-dire, qui sont plus rapprochées du Soleil que Mercure; elles devraient être visibles, pendant les éclipses. On doute, après plusieurs recherches infructueuses, qu'il y en ait.

2° Les observations des détails des protubérances et de la Couronne.

3° Les observations spectroscopiques, visuelles ou photographiques, sur les spectres de la Couronne, des protubérances du Soleil et de la base de son atmosphère.

13 - Rotation de la Lune sur elle-même - Libration - Aspect physique de la Lune -

Les corps célestes sont si éloignés qu'on possède peu de renseignements sur leur mouvement de rotation sur eux-mêmes et sur leur nature physique. La Lune fait exception à cause de sa proximité relative. On a remarqué depuis les temps les plus anciens, bien avant l'invention des lunettes, que pendant chaque révolution, la Lune présente toujours la même face à l'observateur placé sur la Terre. Une conséquence de ce fait est que la Lune tourne sur elle-même et dans un temps égal au temps de sa révolution autour de la Terre.

Cette constatation justifie par raison d'analogie le système de Copernic.

Le mouvement de rotation de la Lune est uniforme ; comme son mouvement en longitude ne l'est pas, on ne voit pas toujours les mêmes points ; on découvre un peu plus de la moitié de la Lune. Les petites oscillations des parties visibles constituent la libration de la Lune.

Depuis l'invention des lunettes, la surface de la Lune, ses changements possibles ont été souvent examinés. De tous les corps célestes, c'est le plus près et par conséquent celui qu'on peut le mieux étudier.

Des cartes détaillées de la Lune ont été construites, et dans ces dernières années de belles photographies ont été obtenues, en particulier par M.M. Lœwy et Puiseux, à l'observatoire de Paris.

Pour se rendre compte des détails qu'on pourrait actuellement discerner sur la surface de la Lune, admettons un pouvoir séparateur de 0",1 pour une Lunette (Chap. II, n° 9) c'est-à-peu près la limite aujourd'hui ; on pourra donc distinguer sur la Lune deux points distants de d tel que

$$206265'' \frac{d}{60r} = 0''1 \text{ d'où } d = \frac{60 \times 6.400.000 \text{ mètres}}{200.000 \times 10}$$

$$d = 192 \text{ mètres.}$$

Les détails caractéristiques de la surface sont les cratères ou cirques.

D'après le phénomène des occultations, qui a lieu d'une manière subite, il est probable qu'il n'y a plus d'atmosphère à la surface ou du moins qu'elle est très rare.

Chapitre X.

La loi de la gravitation tirée des observations.

1. L'idée de l'attraction avant Newton. Premier essai de Newton en 1666.

Après avoir découvert la courbe que les planètes décrivent autour du Soleil et les lois de leurs mouvements, Kepler pressentit l'attraction dont ces lois dérivent. Avant Newton, Fermat, Roberval, Hook exprimaient d'une manière très claire l'idée de l'attraction du Soleil sur les planètes, de la Lune sur les eaux de la mer . . .

Mais il fallait que les lois de la Dynamique fussent établies, ce que l'on doit à Galilée (1564-1642). D'après le principe de l'inertie (Cours de Mécanique 1ière année), un point matériel ne peut passer de lui-même de l'état de repos à l'état de mouvement. Une fois en mouvement, il ne peut modifier de lui-même son état de mouvement; de sorte que, si aucune cause extérieure n'agit sur lui, sa vitesse conserve constamment la même grandeur et la même direction, c'est-à-dire que son mouvement se maintient rectiligne et uniforme.

D'après le principe de l'indépendance du mouvement acquis et des effets simultanés des forces (Cours de Mécanique de 1ière Année), lorsqu'une ou plusieurs forces agissent sur un point matériel, chacune d'elle agit comme si les autres n'existaient pas et comme si le point matériel partait du repos.

Galilée déduisit de là les lois du mouvement des projectiles en composant le mouvement oblique, effet de l'impulsion communiquée au corps, avec le mouvement suivant la verticale dû à l'action de la pesanteur.

Huygens (1629-1695) compléta les découvertes de Galilée: il ajouta à la théorie de l'accélération des corps pesants celles des mouvements des pendules et des forces qui produisent le mouvement circulaire; l'extension de ces résultats à des mouvements variés dans des courbes quelconques est due à Newton (1642-1727)

Un des contemporains et amis de Newton a raconté les premiers essais de Newton, en 1666.

Il se promenait seul dans un jardin, méditant sur la pesanteur et sur ses propriétés. Cette force, disait-il ne diminue pas sensiblement, quoiqu'on s'élève au sommet des plus hautes montagnes; il est donc naturel d'en conclure que cette puissance s'étend beaucoup plus loin; pourquoi ne s'étendrait-elle pas jusqu'à la Lune? Mais si cela est, il faut que cette pesanteur influe sur le mouvement de la Lune; peut-être sert-elle à retenir la Lune dans son orbite et quoique la force de la gravité ne soit pas sensiblement affaiblie par un petit changement de distance tel que nous pouvons l'éprouver ici-bas, il est très possible que, dans l'éloignement où se trouve la Lune, cette force soit fort diminuée. Pour parvenir à estimer quel pouvait être le mode de diminution, Newton songea que si la Lune était retenue dans son orbite par la force de la gravité, il n'y avait pas de doute que les planètes ne tournassent autour du Soleil en vertu de la même force.

En comparant les périodes des différentes planètes avec leurs distances au Soleil, les orbites étant supposées circulaires et décrites d'un mouvement uniforme, il trouva que si une force semblable à la gravité les retenait dans leurs orbites, elle devait diminuer en raison inverse du carré de la distance.

En effet, partant de ce principe qu'un mobile se mouvant avec une vitesse uniforme V sur un cercle de rayon R peut être considéré comme tiré vers le centre du cercle par une force constante $F = m\frac{V^2}{R}$, m désignant la masse du mobile, et remplaçant V par

$$V = \frac{2\pi R}{T}$$

où T est la durée de révolution, il vient

$$F = 4\pi^2 m \frac{R}{T^2}$$

Si l'on écrit l'expression comme il suit,

$$F = 4\pi^2 m \frac{R^3}{T^2} \cdot \frac{1}{R^2},$$

on voit que, dans un système de corps tournant autour

d'un centre, comme les planètes autour du Soleil, à cause de la 3ième loi de Képler qui donne

$$\frac{R^3}{T^2} = \text{Constante},$$

la force qui tire chaque corps vers le centre doit diminuer en raison inverse du Carré de la distance.

Newton supposa donc que le pouvoir de la gravité s'étendait jusqu'à la Lune et diminuait dans le rapport indiqué, et il calcula si cette force était capable de retenir la Lune dans son orbite, qu'il supposa encore circulaire.

g étant l'accélération due à la pesanteur, r le rayon du globe terrestre, R le rayon de l'orbite de la Lune; si l'on admet que la force de la gravité diminue en raison inverse du carré de la distance à partir du centre du globe terrestre, il vient pour l'expression de la force capable de retenir la Lune.

$$F = mg.\frac{r^2}{R^2}.$$

d'où la relation qui doit être vérifiée;

$$4\pi^2 m\frac{R}{T^2} = mg\frac{r^2}{R^2};$$

T désigne ici la durée de la révolution sidérale de la Lune.
La relation précédente s'écrit

$$g = 4\pi^2\frac{R^3}{r^2T^2}.$$

Faisons $R = 60\,r$ et prenons pour unité de longueur le mètre et pour unité de temps la seconde de temps moyen.

$$g = \frac{4\pi^2 r \times 61 \times 60 \times 60}{(27\frac{1}{3} \times 24 \times 60 \times 60)^2}$$

Le calcul donna à Newton, en adoptant la valeur alors employée pour r, un nombre se rapprochant de $g = 9^m,81$.

Ce résultat ne pouvait être considéré comme décisif, à cause de la supposition des orbites circulaires et de l'incertitude de l'hypothèse admise sur la diminution de la gravité à partir de la surface terrestre. Newton n'était pas encore en possession du résultat que l'attraction d'une sphère sur un point

extérieur est la même que si toute la masse est concentrée au centre. Rien ne fut publié.

2. Interprétation mécanique des lois de Képler. Quelques années après, vers 1680, Newton trouva l'interprétation mécanique des lois de Képler, en considérant le Soleil et les planètes comme de simples points matériels, ce qui peut être admis, dans une première approximation, en égard à la petitesse des rayons des sphères des différents corps vis-à-vis de leurs distances mutuelles.

Il résulte des deux premières lois que la force qui sollicite une planète passe par le Soleil et que son intensité varie en raison inverse du carré de la distance de la planète au Soleil.

L'orbite décrite par une planète est une courbe plane; la force agit dans le plan de l'orbite. Prenons ce plan pour l'un des plans d'un système de coordonnées rectangulaires, l'origine étant au Soleil.

Les équations différentielles du mouvement de la planète dans ce plan seront

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

La loi des aires s'exprime par l'équation suivante en coordonnées polaires

$$\frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{1}{2} C dt$$

$$r^2 d\theta = C dt$$

Si l'on introduit les coordonnées rectangulaires x y à la place des coordonnées polaires r θ

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

d'où

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x},$$

et, en différentiant

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$$

$$d\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

la loi des aires s'exprime par la condition

$$x\,dy - y\,dx = C\,dt$$

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C$$

Il résulte de la en différentiant

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

et, en comparant avec les équations du mouvement

$$xY - yX = 0, \quad \frac{X}{x} = \frac{Y}{y};$$

la force passe par l'origine ou par le Soleil.

Elle est nécessairement dirigée vers le Soleil puisque la trajectoire elliptique de la planète tourne constamment sa concavité vers l'origine; c'est une force attractive, et si l'on désigne son intensité par F, on a

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = -\frac{F}{r}.$$

Pour déduire l'expression de la force F de la loi du mouvement elliptique, servons nous du théorème des forces vives, que l'on déduit des deux équations différentielles en les multipliant par dx, dy, ajoutant et intégrant:

$$\frac{1}{2}mV^2 = \int (X\,dx + Y\,dy)$$

$$V^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} = \frac{C^2}{r^4}\,\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{d\theta^2}$$

en vertu de l'intégrale des aires $r^2 d\theta = C\,dt$.

$$X\,dx + Y\,dy = -\frac{F}{r}(x\,dx + y\,dy) = -F\,dr$$

Si l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires est

$$\frac{1}{r} = f(\theta)$$

on a

$$V^2 = \frac{C^2}{r^4}\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right) = C^2(f^2 + f'^2)$$

et en différentiant l'intégrale des forces vives par rapport à θ.

$$\frac{1}{2} m \, dV^2 = -F dr$$

$$\frac{1}{2} m C^2 (2ff' + 2f'f'') = + \frac{Ff'}{f^2}$$

$$F = m C^2 f^2 (f + f'').$$

On peut écrire

$$F = \frac{mC^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right]$$

Dans le cas d'une planète, d'après la 2ième loi, on a

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \varpi)}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos(\theta - \varpi)}{p}$$

en désignant par ϖ la longitude du périhélie et par e et p l'excentricité et le paramètre de l'ellipse. On en déduit

$$\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} = \frac{1}{p}$$

$$F = \frac{mC^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

La troisième loi de Képler permet de démontrer que la force qui agit sur une planète quelconque ne dépend que de la distance de cette planète au Soleil ; qu'elle est la même pour tout état de mouvement de la planète ; enfin qu'elle est proportionnelle à la masse de la planète.

Il suffit, pour le démontrer d'avoir égard à l'expression de C

$$\frac{1}{2} C = \frac{\pi a b}{T},$$

T étant la durée de la révolution sidérale de la planète, a et b les axes de l'ellipse décrite

$$C = \frac{2\pi a b}{T}$$

$$\frac{C^2}{p} = 4\pi^2 \frac{a^2 b^2}{a(1-e^2)T^2} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}$$

D'après la troisième loi de Képler, $\frac{a^3}{T^2}$ conserve la même valeur pour toutes les planètes; soit

$$\mu = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} = \frac{C^2}{p}$$

il vient pour l'expression de la force F agissant sur une planète quelconque

$$F = \frac{\mu m}{r^2}$$

Les corps célestes sont vis-à-vis du Soleil comme des corps pesants vis-à-vis de la Terre.

3. Problème inverse - Mouvement d'un point soumis à une force centrale attractive agissant en raison inverse du carré de la distance du mobile au centre fixe (Soleil).

Newton s'est proposé ce problème après avoir obtenu les résultats qui précèdent.

La trajectoire est contenue dans le plan passant par le Soleil et par la vitesse initiale du mobile.

En remplaçant F dans la relation

$$F = \frac{mC^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right]$$

par sa valeur $F = \frac{\mu m}{r^2}$,

les angles θ étant comptés à partir d'un rayon vecteur arbitraire, il vient

$$\frac{\mu}{C^2} = \frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}.$$

On écrit

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}-\frac{\mu}{C^2}\right)}{d\theta^2}+\frac{1}{r}-\frac{\mu}{C^2}=0,$$

et on voit immédiatement que l'intégrale générale peut s'écrire

$$\frac{1}{r}-\frac{\mu}{C^2}=\frac{\mu}{C^2}\, e \cos(\theta-\varpi),$$

e et ϖ désignant deux constantes arbitraires. On tire de là

$$r=\frac{\frac{C^2}{\mu}}{1+e\cos(\theta-\varpi)}$$

on en conclut que la trajectoire est une section conique ayant pour foyer le Soleil, et que le paramètre $p=\frac{C^2}{\mu}$, relation qui exprime (N° précédent) la 3ième loi de Képler.

La trajectoire peut être l'une des trois sections coniques, ellipse, parabole, hyperbole, d'après la grandeur de la vitesse initiale, indépendamment de sa direction.

Il suffit pour le voir d'appliquer le théorème des forces vives. Le travail élémentaire de la force centrale attractive $F=\frac{\mu m}{r^2}$ est $-\frac{\mu m}{r^2}dr$; le théorème des forces vives donne

$$\frac{1}{2}mV^2=\int F\,dr=\frac{\mu m}{r}+\text{Constante}$$

d'où

$$V^2-\frac{2\mu}{r}=V_0^2-\frac{2\mu}{r_0}=\text{Constante};$$

r_0 et V_0 sont le rayon vecteur initial et la vitesse initiale.

La valeur de la constante est aisée à calculer en considérant le mobile au périhélie et observant qu'en ce point on a

$$C=r^2\frac{d\theta}{dt}=\frac{r\,d\theta}{dt}\,r=Vr$$

$$r=a(1-e),$$

$$\mu=\frac{C^2}{p};$$

par suite, pour cette position du mobile

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} = \frac{C^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r} = \frac{\mu}{r}\left(\frac{p}{r} - 2\right) = -\frac{\mu}{a}$$

On a donc

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} = V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} = -\frac{\mu}{a}$$

On voit que pour une trajectoire elliptique, la vitesse initiale V_0 donnée par

$$V_0^2 = \frac{2\mu}{r_0} - \frac{\mu}{a}$$

ne doit pas dépasser la limite $\sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$; pour cette valeur limite a devient infini; l'orbite est parabolique. Pour des vitesses plus grandes, l'orbite serait hyperbolique.

La relation $C^2 = p\mu = a(1-e^2)\mu$ d'où

$$1 - e^2 = \frac{C^2}{a\mu} = \frac{C^2}{\mu^2} \cdot \frac{\mu}{a} = \frac{C^2}{\mu^2}\left(\frac{2\mu}{r_0} - V_0^2\right)$$

montre encore comment la nature de la conique dépend de $\frac{2\mu}{r_0} - V_0^2$

Il est à remarquer que ces résultats sont indépendants de la direction de la vitesse initiale.

4 – Extension de la loi d'attraction aux Comètes.

Il parait de temps en temps des astres qui à l'opposé des planètes se meuvent en tous sens, et parfois avec une extrême rapidité quand ils sont assez près de nous, ce sont les comètes.

Tycho-Brahé démontra qu'elles sont situées plus loin que la Lune. On constata ensuite qu'elles se meuvent dans des orbites sensiblement paraboliques ayant le Soleil pour foyer.

En possession des résultats ci-dessus indiqués, Newton devait naturellement considérer les comètes comme des planètes tournant autour du Soleil comme les autres corps du système solaire, mais décrivant des orbites si allongées, qu'elles ne sont visibles pour nous que dans une très petite partie de leur orbite; la portion visible de leur trajectoire se confond sensiblement avec une parabole près du périhélie.

Le 14 Novembre 1680, parut une comète qui se rapprocha rapidement du Soleil et disparut dans ses rayons le 5 Décembre. Le 22 Décembre suivant une comète très brillante apparaissait de l'autre côté du Soleil. En calculant les orbites des deux comètes, Newton démontra qu'elles ne formaient qu'un seul et même astre: elles avaient décrit chacune un arc d'une même parabole. De plus les rayons vecteurs issus du Soleil décrivaient des aires égales dans des temps égaux.

Il suffit, pour être en droit d'étendre aux comètes l'interprétation mécanique des lois de Képler, de constater que, dans l'expression de la force déduite de la proportionnalité des aires décrites aux temps et de la forme de l'orbite.

$$F = \frac{mC^2}{p}\frac{1}{r^2},$$

le facteur $\frac{C^2}{p}$ est le même pour les différentes comètes et coïncide avec la valeur commune à toutes les planètes. C'est ce que permettent de constater les calculs nombreux, effectués, depuis Newton sur les comètes.

Avec les planètes, on ne pouvait démontrer l'existence de l'attraction que pour des points situés dans le voisinage de l'écliptique; les comètes au contraire sillonnent l'espace dans tous les sens et, partout où elles pénètrent, elles nous montrent la même loi d'attraction qui les accompagne.

5. Importance du théorème concernant l'attraction d'une sphère homogène sur un point extérieur dans le développement de la théorie de Newton.

Il a été établi dans le Cours de Mécanique de 1e année qu'une sphère homogène ou composée de couches sphériques homogènes attire un point extérieur comme si toute la masse était concentrée au centre de la sphère; l'attraction est supposée agir en raison inverse du carré des distances.

Newton a obtenu ce beau théorème en 1685.

Il en résulte que dans l'hypothèse de l'attraction en raison inverse du carré des distances, deux sphères s'attirant de même que si leurs masses étaient réunies à leurs centres, on peut remplacer les sphères des corps célestes par des points matériels ayant même masse.

Dès lors, il est permis d'admettre que la force de gravité

diminue de la surface de la Terre jusqu'à la Lune en raison inverse du carré de la distance au centre de la Terre ; ce qui était auparavant une hypothèse gratuite.

Il devient permis d'interpréter mécaniquement les lois de Képler en assimilant le soleil et les planètes à des points matériels ; ce qui avait été fait à titre d'approximation seulement, en remarquant que les rayons des sphères des corps célestes sont très petits relativement aux distances qui les séparent.

En possession du principe de l'attraction entre points matériels en raison inverse du carré de la distance, Newton dut être convaincu qu'il y avait là la loi élémentaire de laquelle dépendait l'explication mécanique de tous les mouvements.

La considération des mouvements relatifs des satellites d'une même planète autour de cette planète lui montra que les lois de Képler s'étendent à ces mouvements ; que par suite les satellites d'une même planète sont sollicités vers le centre de cette planète par des forces proportionnelles à leurs masses et en raison inverse du carré de la distance au centre de la planète considéré comme un point matériel. C'est la généralisation du résultat obtenu pour la Lune.

Satellites

Si, par une extension naturelle, on attribue à deux points matériels quelconques cette faculté d'attraction réciproque que l'interprétation des lois de Képler conduit à attribuer à tous les éléments du système solaire, on en conclut une loi dont voici l'énoncé.

Soient A et A' deux points matériels quelconques ; désignons par m et m' leurs masses respectives et par r leur distance. Ces points sont assujettis à une liaison mutuelle dont l'effet est le même que si A exerçait sur A' une attraction égale à $\frac{\mu m'}{r^2}$, et A' sur A une attraction égale à $\mu' \frac{m}{r^2}$. Newton a admis que ces deux forces sont égales. Par suite de cette hypothèse, qui étend aux actions à distance le principe de l'égalité de l'action et de la réaction (Cours de Mécanique de 1re Année), on a la relation

$$\frac{\mu m'}{r^2} = \frac{\mu' m}{r^2}$$

d'où

$$\frac{\mu}{m} = \frac{\mu'}{m'} .$$

Si l'on désigne par f la valeur commune de ces deux rapports, on a

$$\mu = f m, \quad \mu' = f m',$$

et l'action réciproque des deux points devient

$$f \frac{m m'}{r^2}$$

6. Principe de la gravitation. Newton a enfin supposé que le cœfficient f a la même valeur pour tout système de deux points matériels.

L'ensemble de ces déductions et de ces hypothèses conduit à cet énoncé ;

Deux points matériels quelconques s'attirent proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de leur distance.

On appelle gravitation la cause de cette action mutuelle des particules matérielles.

L'ouvrage de Newton. Principes mathématiques de la philosophie naturelle, publié en 1687, est consacré à l'explication du mécanisme des mouvements célestes, en partant du principe de la gravitation.

Il importe de ne pas interpréter le mot d'attraction dans un sens trop restreint. Newton a eu soin d'insister sur ce point, en disant que tout se passe comme s'il y avait attraction, sans spécifier la cause qui la produit.

Je me sers, dit-il du mot d'attraction pour exprimer d'une manière générale l'effort que font les corps pour s'approcher les uns des autres, que cet effet soit l'effet de l'action des corps qui se cherchent mutuellement, qu'il soit produit par l'action de l'Ether, ou de tel autre milieu qu'on voudra, qui pousse l'un vers l'autre d'une manière quelconque les corps qui y nagent.

7. Vérification par des expériences directes de la variation de la pesanteur avec la distance au centre de la Terre.

L'expérience suivante permet de constater la diminution de la pesanteur à mesure qu'on s'éloigne de la surface de la Terre.

On dispose une balance ordinaire très sensible, dont le fléau porte à l'une de ses extrémités un premier plateau A auquel est suspendu, par des fils, un deuxième plateau B. On place en B un poids de 1 Kilogramme, auquel on fait équilibre par une tare convenable. Si l'on met le poids dans le plateau A, l'équilibre se trouve détruit, il faut ajouter dans le plateau A un poids appréciable pour le rétablir, l'attraction de la Terre sur le poids a donc diminué.

Soit r la distance du centre de la Terre au plateau inférieur, h la différence de niveau des deux plateaux, le rapport des attractions de la Terre sur la masse m mise dans les plateaux A et B sera

$$\frac{fMm}{(r+h)^2} : \frac{fMm}{r^2} = \left(\frac{r}{r+h}\right)^2 = 1 - \frac{2h}{r} + \dots$$

Si $\frac{2h}{r} = \frac{1}{10^6}$, $h = 3^m,2$,

la variation de poids sera d'un milligramme.

8. Vérification par des expériences directes de la proportionnalité de l'attraction aux masses.

La proportionnalité de l'attraction aux masses a été déduite de l'interprétation mécanique des lois de Képler et du principe de l'égalité de l'action et de la réaction.

La chute des corps pesants présente un cas très simple où cette vérification peut se faire d'une manière précise.

De ce que les forces attractives F', F''... provenant de l'attraction du globe terrestre et agissant sur différents corps tels que de petites sphères leur communiquent une accélération identique, il suit d'après la définition même de la masse (Cours de Mécanique, 1e Année) que les masses m, m', ... des différents corps sont entre elles comme les forces F, F'...

Newton s'est assuré au moyen du pendule, d'une manière très précise, que l'accélération $g = \frac{P}{m}$ imprimée par l'attraction du globe à des corps de différentes masses était la même : g a la même valeur pour des pendules différents.

On ne s'est pas contenté d'étudier l'attraction de la Terre sur des corps placés à sa surface ; on a étudié et mesuré l'attraction entre des corps placés à la surface de la Terre.

L'effet de l'attraction d'une montagne sur le pendule sera considéré plus loin.

La preuve de l'attraction entre différents corps placés à la surface de la Terre a été faite aussi par Cavendish. Les expériences ont été reprises par M.M. Cornu et Baille; elles ont été commencées vers 1872 et continuées depuis avec toutes les précautions possibles, dans les caves de l'École Polytechnique.

9. La théorie de Newton introduit la considération d'un nouvel élément : les masses des corps.

Il faut remarquer que l'explication Mécanique des mouvements des corps célestes ramenée par Newton à des problèmes concernant les mouvements de points ou de systèmes de points matériels sollicités par des forces attractives dont la loi de gravitation fournit l'expression, introduit un élément nouveau, les masses, qui figurent dans les équations différentielles comme des coëfficients à déterminer.

Leurs valeurs devront être déterminées par les équations de condition résultant de la comparaison de la théorie avec les observations. La théorie de Newton donne le moyen de mesurer les masses (1).

Les valeurs des masses devront être les mêmes quelle que soit la méthode employée pour les calculer; ce sera une vérification nécessaire pour la théorie de la gravitation.

Parfois on a été amené à supposer des masses cachées pour expliquer les phénomènes et les observations ultérieures ont confirmé l'existence de ces masses.

---

(1) Voir la Notice sur la Mesure des Masses en Astronomie dans l'Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1889.

Chapitre XI.

Mouvement des planètes autour du soleil conformément à la loi de la gravitation.

1. Etablissement des équations différentielles. Il faut maintenant prendre la loi générale de Newton comme point de départ et en déduire par l'Analyse les mouvements des corps célestes.

Nous considérons le Soleil, les planètes et les satellites comme des globes formés d'une série de couches sphériques homogènes, alors ils s'attireront comme des points matériels placés aux centres des corps et ayant leurs masses respectives.

m et m' étant deux masses quelconques, r leur distance, l'attraction qui s'exerce entre elles est représentée par

$$f\frac{m\,m'}{r^2}$$

Prenons d'abord un système d'axes fixes dans l'espace et rapportons-y le Soleil et les différents corps.

Z, m', Δ, r', m, M, r, 0, Y, X

Soleil masse M coordonnées XYZ

1[er] corps planète ou satellite masse m, ξ, η, ζ

2[ième] " masse m'; ξ', η', ζ'

$Mm = r$, $Mm' = r'$ $m\,m' = \Delta$

L'accélération du mouvement du Soleil doit être égale à la résultante des forces qui agissent sur lui divisée par la masse M, (Cours de Mécanique, 1[re] Année). On aura par suite pour l'axe OX.

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{fm}{r^2}\,\frac{\xi - X}{r} + \frac{fm'}{r'^2}\,\frac{\xi' - X}{r'} + \dots$$

dans le second membre chaque force telle que la force attractive de m, égale à $f\frac{Mm}{r^2}$, donne $\frac{fm}{r^2}$ après la division par M;

il faut multiplier ensuite par le cosinus de l'angle qu'elle fait avec l'axe OX, qui est

$$\frac{\xi - X}{r}$$

On trouverait de même pour la planète ou satellite m

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = fM\frac{X-\xi}{r^3} + fm'\frac{\xi'-\xi}{\Delta^3} + \dots$$

Les observations ne nous font pas connaître les mouvements absolus des planètes dans l'espace, mais leurs mouvements relatifs par rapport au Soleil; il importe donc de former les équations différentielles dont dépendent les mouvements relatifs.

Posons

$$\begin{array}{ll} x = \xi - X & x' = \xi' - X \\ y = \eta - Y & y' = \eta' - Y \\ z = \zeta - Z & z' = \zeta' - Z \end{array}$$

Retranchons les deux équations précédentes, il vient

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} = -f(M+m)\frac{x}{r^3} + fm'\left(\frac{x'-x}{\Delta^3} - \frac{x'}{r'^3}\right) + \dots$$

soit $M + m = \mu$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\mu\frac{x}{r^3} = fm'\left(\frac{x'-x}{\Delta^3} - \frac{x'}{r'^3}\right) + \dots$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + f\mu\frac{y}{r^3} = fm'\left(\frac{y'-y}{\Delta^3} - \frac{y'}{r'^3}\right) + \dots$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + f\mu\frac{z}{r^3} = fm'\left(\frac{z'-z}{\Delta^3} - \frac{z'}{r'^3}\right) + \dots$$

Ce sont les équations du mouvement du corps m.

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad r' = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}, \qquad \Delta = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$$

On aurait un système de 3 équations analogues pour chaque corps. Donc, dans le cas général de n corps, le problème de la détermination de leurs mouvements dépend de $3n$ équations différentielles du second ordre, et il y a $6n$ intégrales à chercher.

2. Intégration des équations différentielles par approximations, Equations du mouvement elliptique. Equations du mouvement troublé. Fonction perturbatrice. Dans le cas relativement simple où l'on considère le Soleil, la Terre et la Lune, c'est-à-dire trois corps, il y aurait 12 intégrales à chercher. On en connait quelques unes fournies par les théorèmes généraux de la Mécanique, ceux du mouvement du centre de gravité d'un système sans forces extérieures, des aires et des forces vives; mais on ne peut espérer en trouver d'analogues d'après ce qui a été démontré par Mr Poincaré dans un mémoire sur le problème des trois corps. Force est de recourir aux approximations, ce qui a toujours été fait par les Astronomes et les Géomètres qui ont voulu obtenir des résultats pratiques.

Mr Poincaré a toutefois réussi à trouver plusieurs catégories de cas, caractérisés par le choix convenable des coordonnées et des vitesses initiales autrement dit des constantes arbitraires, et dans lesquels le problème est susceptible d'une solution complète; les coordonnées des corps repassent périodiquement par les mêmes valeurs. Mais ces conditions ne sont pas réalisées, au moins exactement, dans la nature.

Les remarques qui guident dans les approximations sont les suivantes.

On observe que les planètes se meuvent dans des orbites presque circulaires, dont les rayons sont notablement différents les uns des autres; surtout que les masses m', m'', ... des différentes planètes y compris leurs satellites sont très petits relativement à $\mu = M + m$, $\mu' = M + m'$, ...

Pour Jupiter, qui a la plus grande masse, on a $\frac{m}{\mu} < \frac{1}{1000}$.

Alors, pour la première approximation, on ne tient pas compte dans les équations différentielles des termes en m', m''... suivant les deux premiers; on fait les masses $m' = m'' = . = 0$.

Les équations se réduisent à

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\mu \frac{x}{r^3} = 0,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + f\mu \frac{y}{r^3} = 0, \qquad \mu = M + m$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} + f\mu \frac{z}{r^3} = 0,$$

et aux équations analogues pour les différents corps.

On appelle ces équations les équations du mouvement elliptique; ces équations sont en effet celles du mouvement d'un point matériel de masse m sollicité par une force dirigée vers l'origine des axes et ayant pour expression

$$F = \frac{f\mu m}{r^2}$$

On sait que la trajectoire est nécessairement une section conique (chapitre X n°3).

Les équations différentielles complètes qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\mu \frac{x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + f\mu \frac{y}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + f\mu \frac{z}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial z}$$

en posant

$$R = f m' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}\right) + \dots$$

sont les équations différentielles du mouvement réel ou perturbé; R est appelé la fonction perturbatrice, les masses m', m'' . . . sont les masses perturbatrices.

La dérivée partielle de R par rapport à une des coordonnées représente la composante de la force perturbatrice suivant l'axe correspondant.

3. Première approximation. Mouvement elliptique.

Pour plus de simplicité, on va considérer le cas de mouvements ayant lieu dans un même plan celui de l'écliptique ; on s'écarte peu de la réalité.

Les équations différentielles sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\mu \frac{x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x} = X$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + f\mu \frac{y}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial y} = Y$$

les équations du mouvement elliptique s'obtiennent en faisant $X = Y = 0$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\mu \frac{x}{r^3} = 0,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + f\mu \frac{y}{r^3} = 0.$$

Elles admettent l'intégrale des aires

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C$$

qui devient, en posant $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C$$

Elles admettent aussi l'intégrale des forces vives (Chap. X, n°3)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}\right) - \frac{f\mu}{r} = Const = -\frac{f\mu}{2a}$$

On a vu dans le chapitre IX, n°3 comment on déduit l'équation en coordonnées polaires de la trajectoire,

$$r = \frac{P}{1 + c\cos(L - \varpi)} \qquad P = \frac{C^2}{f\mu}$$

On remarquera que les trois constantes arbitraires a, $C = na^2\sqrt{1-c^2}$ et ϖ peuvent s'exprimer sous forme algébrique au moyen des coordonnées et de leurs premières dérivées.

L'intégration de l'équation différentielle $r^2 \frac{dL}{dt} = C$; (Chap. VII, n°12) conduit enfin à l'expression de la longitude

$$L = L_0 + nt + 2c\sin(L_0 + nt - \varpi) + \dots;$$

On a par là les coordonnées $\mathfrak{I}$ et ensuite r en fonction explicite de t. $\mathfrak{I}_0$ représente la 4ième constante arbitraire ; elle ne peut s'exprimer algébriquement en fonction des coordonnées de leurs dérivées.

4. Comment on passe des intégrales du mouvement elliptique à celles du mouvement troublé en faisant varier les arbitraires introduites par les intégrations.

On peut imiter dans le cas des équations

$$\begin{array}{l|c|c}
\dfrac{d^2x}{dt^2} + f\mu\,\dfrac{x}{r^3} = \dfrac{\partial R}{\partial x} = X & -\,y & \dfrac{dx}{dt} \\[2ex]
\dfrac{d^2y}{dt^2} + f\mu\,\dfrac{y}{r^3} = \dfrac{\partial R}{\partial y} = Y & x & \dfrac{dy}{dt}
\end{array}$$

la marche suivie tout-à-l'heure pour intégrer les équations du mouvement elliptique ; on trouve ainsi d'abord

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = xY - yX.$$

Si l'on pose

$$xY - yX = \frac{dC}{dt}$$

il viendra

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C$$

résultat de même forme que dans le cas du mouvement elliptique avec cette différence que C n'est plus une Constante, C est variable avec le temps ; mais comme les masses supposées très petites multiplient les termes de

$$\frac{dC}{dt} = xY - yX,$$

C variera très lentement et sera presque constante.

On aura de même pour l'intégrale correspondant à celles des forces vives

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}\right) - \frac{f\mu}{r} = -\frac{f\mu}{2a}$$

en posant

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{f\mu}{2a}\right) = X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt}$$

On voit que ces deux intégrales du mouvement troublé ont reçu la même forme que les intégrales correspondantes du mouvement elliptique mais les arbitraires sont devenues variables. Pour trouver les facteurs pour lesquels il faut multiplier les 2 équations,

Soit en général

$$\alpha = V = f\left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

une intégrale des équations différentielles du mouvement elliptique $(X = 0, Y = 0)$ résolue par rapport à la constante α; si l'on différentie, on doit avoir identiquement

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{dV}{dt} = M\frac{d^2x}{dt^2} + N\frac{d^2y}{dt^2} + P = 0,$$

l'expression $M\frac{d^2x}{dt^2} + N\frac{d^2y}{dt^2} + P$ ne peut être qu'une combinaison linéaire des équations différentielles. Ceci posé, si l'on multiplie les équations différentielles avec les seconds membres X et Y par M et N respectivement et si l'on ajoute, il vient

$$\frac{dV}{dt} = MX + NY,$$

et, en intégrant

$$V = \alpha + \int (MX + NY)\, dt;$$

de sorte que l'arbitraire primitive α étant remplacée par une quantité variable

$$\alpha + \int (MX + NY)\, dt.$$

on retrouve la même forme pour l'intégrale.

Ce résultat peut-être utilisé si l'on a

$X = \mathcal{E}X'$, $Y = \mathcal{E}Y'$ $\mathcal{E}$ étant un coëfficient très petit comparable dans le cas actuel aux masses supposées très petites.

Alors on peut calculer les intégrales en les développant suivant les puissances de $\mathcal{E}$; le mouvement elliptique répond à $\mathcal{E} = 0$. On tient compte ensuite des termes en $\mathcal{E}, \mathcal{E}^2, \ldots$

On a déjà donné un exemple d'approximations successives (Chapitre VII, n° 12).

Donnons encore un autre exemple.

La connaissance de la longitude L en fonction du temps résulte de l'intégration de l'équation

$$r^2 dL = C dt$$

Intégrons la par approximations successives, comme il a été fait, (Chapitre VII, n° 12) en remplaçant r par sa valeur

$$dL = (1-e^2)^{-\frac{3}{2}} \left[1 + 2e\cos(L-\varpi) + e^2\cos^2(L-\varpi)\right] n\,dt,$$

et faisant attention que n, e et ϖ ne sont plus des constantes mais des fonctions du temps.

On trouve en faisant $e = 0$ dans le second membre, pour la première approximation, qui nous suffira,

$$L = L_0 + \int n\,dt.$$

La conclusion à retenir des calculs précédents est la suivante :

Toutes les intégrales trouvées dans le cas du mouvement elliptique se retrouvent dans le cas du mouvement troublé, avec cette différence que les arbitraires ne sont plus des constantes mais des quantités lentement variables avec t ; de plus nt doit être remplacé par $\int n\,dt$ dans les développements de la longitude et du rayon vecteur.

5 - Différentes sortes d'inégalités : périodiques, progressives ou séculaires, à longue période. Détermination des constantes arbitraires et des masses. La dérivée d'un des éléments C, a, ... s'exprime, quand on se borne à la première approximation, par une série trigonométrique $\sum \cos(\alpha t + \beta)$ α et β étant des constantes. L'intégrale s'obtient aussitôt et on doit ajouter une constante arbitraire. La méthode est donc très simple dans le principe, mais il y a des calculs très longs à exécuter. On distingue parmi les termes celui ou ceux pour lesquels $\alpha = 0$; dans ce cas l'intégration donne des termes ayant t en facteur et correspondant à des inégalités progressives ou séculaires. En général α n'est pas nul, on a des termes périodiques représentant des inégalités périodiques. Il peut arriver que le coefficient α, sans être nul, soit très petit ; alors on a une inégalité périodique mais à période très longue, qui, pendant un certain temps offre l'allure d'une inégalité séculaire.

Laplace et Lagrange ont montré que les grands axes des orbites des planètes n'ont pas d'inégalités progressives; c'est en cela que consiste la stabilité du système solaire.

Jupiter et Saturne ont paru pendant un temps faire exception. Laplace a montré que cela tenait à l'existence d'inégalités à longues périodes.

C'est surtout pour les longitudes que la circonstance peut se produire à cause de la double intégration nécessitée par le calcul de

$$\int n\,dt$$

C'est aussi à Laplace qu'on doit l'explication d'une inégalité séculaire de l'arbitraire t_0 dans le cas de la Lune, inégalité qui donne lieu à une accélération apparente dans le mouvement de la Lune.

Les valeurs des constantes arbitraires et celles des masses m, m' . . . se déterminent d'une manière générale par les équations de condition que fournit la comparaison des observations avec la théorie.

Les masses des planètes qui ont des satellites se déterminent plus facilement. Bornons-nous à la première approximation pour les mouvements, celle du mouvement elliptique.

Soient M la masse du Soleil,
m la masse d'une planète ayant un satellite σ
T la durée de la révolution sidérale de la planète autour du Soleil
a le demi-grand axe de l'ellipse
$T'a'$ les quantités analogues pour le satellite σ

L'équation

$$4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} = f\,(M+m)$$

devient dans le cas du satellite

$$4\pi^2 \frac{a'^3}{T'^2} = f\,(m + \text{masse de } \sigma)$$

négligeons m devant M et la masse σ devant m, il viendra en divisant

$$\frac{m}{M} = \left(\frac{a'}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T'}\right)^2 .$$

T et T' sont faciles à déterminer par les observations. Quant à $\frac{a'}{a}$, plaçons nous dans le cas simple où les orbites sont dans le plan de l'écliptique, celle du satellite étant circulaire; alors les mesures faites aux plus grandes élongations du satellite de sa planète donneront, le triangle $\sigma J T$ étant rectangle en σ,

$$\frac{\sigma J}{JT} = \sin p. \quad \sigma J = a';$$

de là

$$\frac{a'}{a} = \sin p. \ \frac{JT}{a}.$$

$\frac{JT}{a}$ est le rapport de la distance géocentrique de la planète au demi-grand axe au moment de l'observation. Ce rapport peut être calculé par les formules du Chap. VII, n° 9, 10.

On a ainsi trouvé les résultats suivants:

Planètes	Nombre des satellites	Inverse de la masse rapportée au Soleil.
Mars	2	3.100.000
Jupiter	5	1047
Saturne	8	3500
Uranus	4	22600
Neptune	1	19380

La masse m de la Terre peut être déterminée par les mesures de g avec le pendule si l'on a déterminé d'autre part la parallaxe du Soleil

On a

$$4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} = f(M+m) = n^2 a^3$$

L'accélération g, en supposant la Terre sphérique de rayon r et laissant de côté le mouvement de rotation, est donnée par

$$g = \frac{fm}{r^2}$$

d'où, en divisant

$$\frac{m}{M+m} = \frac{g r^2 T^2}{4\pi^2 a^3} = \frac{g T^2}{4\pi^2 r}\left(\frac{r}{a}\right)^3 = \frac{1}{330.000} \text{ (environ)}$$

$\frac{r}{a}$ est le sinus de la parallaxe horizontale du Soleil P à la distance moyenne a. Donc

$$\frac{m}{M+m} = \frac{g T^2}{4\pi^2 r} \sin^3 P$$

Cette équation de condition permettra inversement de déterminer P si l'on a obtenu $\frac{m}{M}$.

6. Force perturbatrice du Soleil dans le mouvement de la Lune autour de la Terre. La Lune est surtout troublée dans son mouvement elliptique autour de la Terre par le Soleil qui est très loin mais a une grosse masse.

On se tromperait si pour apprécier l'action perturbatrice du Soleil, on prenait le rapport des attractions du Soleil et de la Terre sur la Lune. Comme on étudie un mouvement relatif, celui de la Lune autour de la Terre mobile elle-même, il faut appliquer à la Lune les forces apparentes qui se réduisent, si les axes de coordonnées se déplacent parallèlement à eux-mêmes l'origine étant au centre de la Terre, à la seule force d'inertie d'entraînement égale et contraire à celle qui produit l'accélération du mouvement de la Terre.

Evaluons l'ordre de grandeur de la force perturbatrice dans un cas simple

$$\underset{T}{\overset{m}{*}} \quad \underset{L}{\overset{m'}{*}} \qquad\qquad \underset{S}{\overset{M}{*}}$$

Supposons les trois astres en ligne droite

L'attraction du Soleil sur la Lune est $f\,\frac{M m'}{\overline{SL}^2}$

l'attraction du Soleil sur la Terre est $f\,\frac{M m}{\overline{ST}^2}$ et l'accélération $\frac{fM}{\overline{ST}^2}$

Donc la force perturbatrice du Soleil dans le mouvement relatif de la Lune est

$$\frac{fMm'}{\overline{SL}^2} - \frac{fM}{\overline{ST}^2}m' = fMm'\,\frac{\overline{ST}^2 - \overline{SL}^2}{\overline{SL}^2 \cdot \overline{ST}^2} = fMm'\,\frac{(ST+SL)(ST-SL)}{\overline{SL}^2\,\overline{ST}^2}$$

$$= fMm'\,\frac{2TL}{\overline{ST}^3} \text{ (sensiblement)}$$

le rapport à l'attraction de la Terre sur la Lune $\frac{fmm'}{\overline{TL}^2}$ est

$$2\frac{M}{m}\left(\frac{TL}{ST}\right)^3$$

et d'après ce qu'on a trouvé au n° 5 de ce chapitre, T et T' étant les durées des révolutions sidérales de la Terre et de la Lune

$$2\frac{M}{m}\left(\frac{TL}{ST}\right)^3 = 2\frac{T'^2}{T^2} = \frac{1}{80} \text{ (environ)}$$

La force perturbatrice est ici beaucoup plus forte que dans le cas des planètes ; par suite les inégalités du mouvement de la Lune sont très sensibles.

On peut arriver au même résultat par le calcul en prenant pour axe des x la droite TS, T étant à l'origine, et remarquant que, dans l'équation différentielle (ce chapitre, n° 1)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\mu\frac{x}{r^3} = fm'\left(\frac{x'-x}{\Delta^3} - \frac{x'}{r'^3}\right),$$

le second membre représente la composante de la force perturbatrice qui se confond dans le cas actuel avec la force elle-même.

7 - Newton a esquissé la marche à suivre pour expliquer par le principe de la gravitation quelques unes des inégalités de la Lune séculaires ou périodiques, en particulier le mouvement rétrograde du noeud ascendant en 18 ans $\frac{2}{3}$ et le mouvement direct du périgée en 10 ans environ.

Cette théorie a reçu ensuite un grand développement auquel les géomètres français, Clairaut, D'Alembert, Lagrange, Laplace . . . ont pris une large part.

Laplace a réuni l'ensemble des théories dans son grand Traité de Mécanique Céleste.

Dans notre siècle, Le Verrier (1811-1877), l'auteur de la découverte de Neptune, en 1846, a fait la révision des planètes principales du système solaire.

Le Verrier est arrivé, par la théorie, à prédire la position de Neptune. Il existait des écarts entre la théorie d'Uranus, la planète la plus éloignée du Soleil et l'observation. On pensait bien qu'une planète plus éloignée qu'Uranus était capable de produire ces écarts, mais le difficile était d'aborder le problème et de préciser la position de la planète inconnue.

Le Verrier calcula les perturbations d'Uranus causées par la planète supposée; il établit les équations de condition propres à faire cadrer la théorie et l'observation, et il détermina les éléments et la position de la planète inconnue. Neptune fut trouvé par M. Galle, à l'observatoire de Berlin, le jour même de la réception de la lettre indiquant la position de la planète hypothétique.

Presqu'en même temps, en Angleterre, un jeune homme devenu illustre depuis, J. C. Adams, arrivait à des conclusions analogues à celles de Le Verrier; mais Le Verrier a eu la priorité.

Delaunay (1816-1872) a consacré tous ses efforts à la théorie du mouvement de la Lune qui présente des difficultés particulières.

Chapitre XII.

Forme et mouvement de rotation des planètes; marées; d'après la théorie de Newton.

1. Hypothèse de la fluidité primitive des corps célestes; elle permet avec la théorie de la gravitation d'expliquer leurs figures et leurs mouvements sur eux-mêmes.

La loi de la gravitation permet de ramener, comme on l'a vu, l'étude du mouvement des centres des sphères du Soleil et des planètes à un problème de Mécanique.

Newton a pareillement ramené à la Mécanique les questions relatives à la forme des corps célestes et à leurs mouvements autour de leurs centres de gravité, en admettant que ces corps ont dû être fluides à l'origine et qu'ils ont sensiblement conservé en se refroidissant la figure d'équilibre relatif résultant de l'attraction mutuelle de leurs molécules combinée avec la force d'inertie d'entraînement, ici la force centrifuge provenant du mouvement de rotation (la force centrifuge composée est nulle puisqu'il y a équilibre relatif)

C'est ainsi que Newton avait prévu, avant toute mesure, l'aplatissement de la Terre aux pôles.

L'hypothèse de la fluidité primitive des corps célestes sans être établie sur des raisons aussi fortes que la loi de la gravitation paraît conforme aux faits géologiques; elle conduit du reste à des conséquences vérifiées par l'observation.

Montrons qu'il n'y a pas lieu, au moins à une première approximation, de faire intervenir d'autres forces que l'attraction mutuelle des molécules et la force centrifuge venant du mouvement de rotation supposé uniforme, autour d'un axe de direction supposée invariable.

Pour fixer les idées, considérons la Terre et le Soleil.

D'après la théorie du Mouvement relatif (Cours de Mécanique 1e année), il faudrait composer l'attraction du Soleil sur une particule fluide de la surface du globe avec la force égale et contraire à celle qui produit l'accélération du centre de la Terre. Or la résultante est très petite relativement à l'attraction de la Terre, on a évalué chapitre XI, n°6 la force perturbatrice du Soleil

sur le mouvement de la Lune autour de la Terre ; la molécule que l'on considère à la surface de la Terre est à une distance 60 fois moindre que la Lune, il faut diviser le rapport trouvé en considérant la Lune (Chapitre XI, n° 6) et égal à $\frac{1}{80}$ par le cube du rapport

$$\frac{\text{distance Terre Lune}}{\text{Rayon de la Terre}} = 60 ;$$

c'est la force qui produit les marées et qu'on peut négliger dans une première approximation.

Prenons l'axe de rotation comme axe des Z, le centre de gravité G comme origine. Soit ω la vitesse angulaire de rotation. Soit P une molécule placée à la surface de la figure d'équilibre que nous supposons de révolution. On sait que les composantes X, Y, Z de l'attraction de la masse de la planète sur le point P (de masse 1) sont les dérivées partielles de la fonction potentielle

$$u = \int \frac{\rho\, dV}{r} ,$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments de masse $\rho\, dV$ de la planète, et r désignant la distance de l'élément de masse $\rho\, dV$ au point P.

Les composantes de la force centrifuge sont d'autre part (masse de $P = 1$)

$$\omega^2 x, \quad \omega^2 y, \quad 0$$

L'équilibre exige que la résultante des forces soit perpendiculaire à la surface du fluide

Celle des surfaces de la famille

$$u + \frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2) = c$$

qui passe par le point P satisfait à la condition demandée.

Le problème dépend donc essentiellement de la recherche de u.

La recherche de la fonction potentielle ou de l'attraction d'un corps sur un point extérieur, qui est déjà difficile quand on connaît le corps attirant, l'est beaucoup plus ici parce qu'on ne connaît pas à priori la forme de la figure d'équilibre.

Newton a supposé le fluide homogène. Il a admis que la figure d'équilibre était celle d'un ellipsoïde de révolution peu aplati, conformément à ce que les observations apprennent sur Jupiter et Saturne. Newton est ensuite parvenu sans calculer u, à montrer que l'aplatissement $\mu = \frac{a-b}{a}$ devait être $\frac{1}{230}$ dans le cas de la Terre supposée homogène.

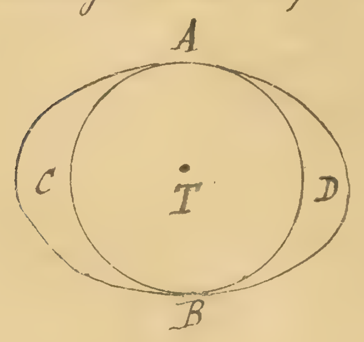
Imparfaite comme elle était, cette théorie était bien en avance sur les observations, puisque 50 ans plus tard on ne savait encore pas si les mesures géodésiques assignaient à la Terre une figure aplatie ou allongée.

Clairaut a prouvé qu'un ellipsoïde de révolution pouvait être effectivement une figure d'équilibre; il a complété l'œuvre de Newton dans son ouvrage sur la Théorie de la figure de la Terre, (1743) que Laplace range parmi les plus belles productions mathématiques.

2. Explication de la précession par Newton. Le problème est de savoir si les attractions de la Lune et du Soleil changent le mouvement relatif de la Terre autour de son centre de gravité et déplacent lentement son axe de rotation de manière que le point γ, nœud ascendant de l'équateur, rétrograde de 50" par an.

La théorie du mouvement de rotation d'un corps autour de son centre de gravité n'était pas faite au temps de Newton; elle ne l'a été que beaucoup plus tard par D'Alembert. Newton parvint cependant à connaître la cause de la précession, en la rattachant à sa découverte de l'attraction universelle, dont elle est l'un des plus curieux résultats et l'une des plus fortes preuves.

Après avoir reconnu par sa théorie l'aplatissement de la Terre et expliqué le mouvement des nœuds de l'orbite lunaire, il était naturel que, Newton, envisageant la Terre comme un système de points matériels, distinguât la région centrale sphérique ABCD et le renflement graduel de l'ellipsoïde terrestre du pôle à l'équateur; que Newton comparât ce renflement à un anneau formé d'un nombre infini de satellites tournant autour de la sphère centrale, dont l'attraction sur un quelconque des satellites pouvait être remplacée par celle d'un point matériel placé au centre T.

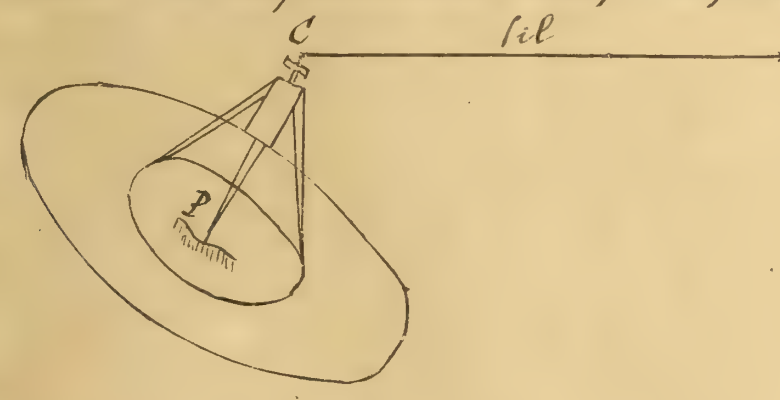


L'attraction solaire devait faire rétrograder les nœuds des orbites que les satellites décrivent, comme elle fait rétrograder les nœuds de la Lune, et l'ensemble de ces mouvements devait produire un mouvement rétrograde dans l'intersection de l'équateur de la Terre avec l'écliptique; mais l'anneau doit communiquer à la masse entière du globe une très grande partie du mouvement affaibli. Tel est le principe de l'explication de Newton.

C'est à D'Alembert (Précession des équinoxes, 1749) qu'on doit une théorie complète du phénomène. Cette théorie commence avec celle du mouvement d'un corps autour d'un point fixe qui fait partie du Cours de Mécanique de 2ième année.

Euler s'occupa du même sujet après D'Alembert et expliqua par la gravitation la diminution séculaire de l'obliquité de l'écliptique mise en évidence par la comparaison des observations très anciennes avec les mesures plus récentes. (l'obliquité ω diminue d'environ 48" par siècle).

Si l'explication mécanique de la précession est difficile on a du moins des expériences simples pour montrer le fait.



Un corps de révolution tel que celui indiqué reposant par la pointe P dans une cavité, on lui communique une vitesse de rotation assez grande.

Si P coïncide avec le centre de gravité de la toupie, l'axe de rotation garde une direction invariable.

Mais si une force agit qui ne passe pas par P, la toupie prend un mouvement de précession - dans le sens rétrograde ou dans le sens direct -. Cela a lieu par exemple si l'on enlève ou si l'on ajoute une petite masse en C; si l'on tire le point C avec un fil.... on constate que le pôle C tend à se déplacer perpendiculairement à la direction dans laquelle on le tire.

3. Explication des Marées par Newton.

Les marées sont dues aux petites perturbations de la Lune et du Soleil sur l'eau de la mer.

La force perturbatrice est très petite puisqu'elle est comparable pour le Soleil à une fraction de la pesanteur terrestre représentée par

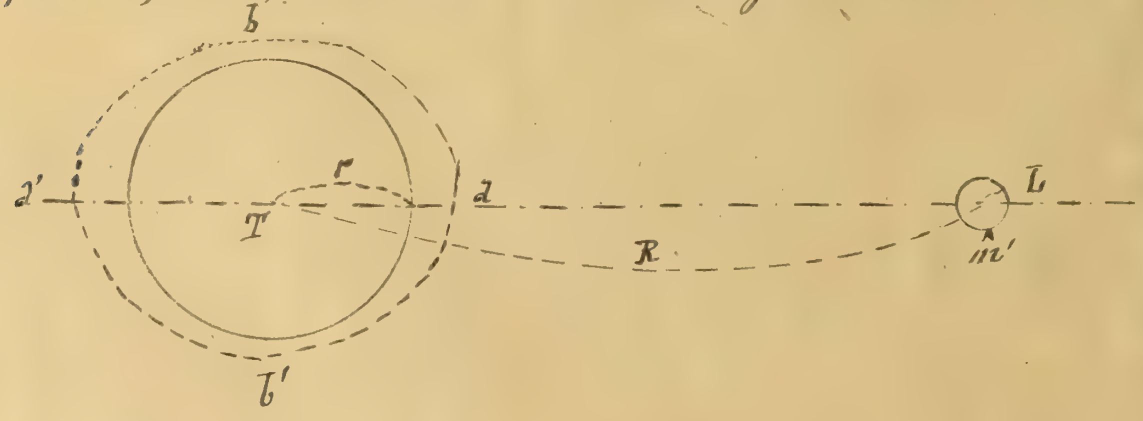
$$\frac{1}{80} \times \frac{1}{(60)^3} \text{ (ce chapitre, N}^\circ\text{1)}$$

L'action de la Lune est du même ordre mais à peu près double ; la Lune a une masse plus faible que le Soleil, mais elle est beaucoup plus près de la terre.

Le problème des marées est une question d'hydrodynamique très difficile.

Toutefois si l'on admet que la surface liquide tend à se rapprocher à chaque instant de la figure d'équilibre déterminée par les forces qui agissent on trouve que la figure de la surface liquide est sensiblement celle d'un ellipsoïde allongé vers l'astre attirant et du côté opposé. Les deux protubérances liquides tournent avec la même vitesse de rotation que l'astre attirant et balayent la surface du globe.

Prenons la Lune comme astre attirant et considérons le cas simple où elle se trouve dans l'équateur. La terre est assimilée à un noyau sphérique homogène recouvert d'une petite quantité de liquide. Évaluons la force perturbatrice de la Lune, de masse m', sur différents points de la surface liquide, leurs masses étant égales à l'unité.



La force perturbatrice de la Lune a pour expression, en a

$$f m' \left[\frac{1}{(R-r)^2} - \frac{1}{R^2} \right]$$

et en a'

$$f m' \left[\frac{1}{(R+r)^2} - \frac{1}{R^2} \right]$$

ou sensiblement

$$\text{en } a : \ 2 f m' \frac{r}{R^3} = \varphi$$

$$\text{et en } a' : \ 2 f m' \frac{r}{R^3} = -\varphi$$

la force perturbatrice est sensiblement nulle en b et b'.

Les poids apparents des masses en a et a', sont, abstraction faite de la force perturbatrice,

masse a × g, masse a' × g;

ces poids apparents deviendront à cause de la force perturbatrice

en a	en a'
masse a × (g − φ)	masse a' × (g − φ)

Les poids apparents sont également diminués en a et a' ils ne sont pas changés en b b'; il faudra pour l'équilibre que la diminution de poids du liquide relativement aux parties voisines de b b' soit compensée par un égal accroissement de hauteur en a et en a'.

Newton a supposé que la surface libre du liquide était celle d'un ellipsoïde, et il a calculé la surélévation du liquide en a a'; elle n'est pas d'un mètre.

Le Soleil doit donner lieu à un autre système de deux protubérances liquides mobiles; mais elles sont plus petites.

Ces deux effets peuvent s'ajouter si les deux astres sont en conjonction ou en opposition; ils peuvent aussi se détruire en partie; ils varient avec la distance de la Lune à la Terre, parce que l'effet dépend de l'inverse du cube de la distance de l'astre perturbateur à la Terre; l'excentricité de l'orbite de la Lune étant de $\frac{1}{18}$, les marées qui ont lieu quand la Lune est au périgée seront les plus fortes.

Les remarques précédentes expliquent une partie des phénomènes, par exemple le retour des hautes mers à un intervalle égal à la moitié du jour lunaire, ou de l'intervalle de temps compris entre deux retours successifs de la Lune au méridien = $24^h 52^m$; la moitié = $12^h 26^m$ ou $12^h \frac{1}{2}$ environ.

Mais s'il y a coïncidence dans les périodes, il y a différence de phase, dans le sens d'un retard, suivant les ports, c'est ce qu'on appelle l'établissement du port; ce retard dépend des conditions locales et varie notablement d'un port à l'autre.

Actuellement, on étudie, à l'exemple de Laplace, le problème au point de vue de l'hydrodynamique, on cherche à déterminer la loi des marées en considérant les principales inégalités de la Lune et du Soleil, admettant que chaque inégalité a sa correspondante dans l'expression de la hauteur verticale de l'eau de la mer, les phases pouvant différer. Les cœfficients sont déterminés empiriquement par les observations.

Ces études rentrent dans les attributions du service hydrographique.

Il est utile pour comprendre le mécanisme des marées de considérer aussi les déviations de la verticale par suite de la force perturbatrice; on voit bien ainsi qu'il ne peut y avoir de marées sensibles pour les petites mers; que le niveau du liquide, là où se produisent les ondes de la marée, tend à se relever du côté où va l'astre attirant.

En certains points du littoral de la France (St Malo, Granville) la différence entre les hautes mers et les basses mers peut atteindre 15 mètres. On comprend quelle est alors l'importance de la connaissance des marées. Outre les variations du niveau de la mer qui règlent les heures de sortie et de rentrée des navires dans le port, les courants parfois très notables produits par le flux et le reflux intéressent beaucoup les marins.

Chapitre XIII.

Établissement définitif du système de Copernic. Découverte de l'aberration et de la nutation par Bradley.

1. Les progrès considérables réalisés par Newton dans l'explication des mouvements célestes appelaient des progrès correspondants dans les observations.

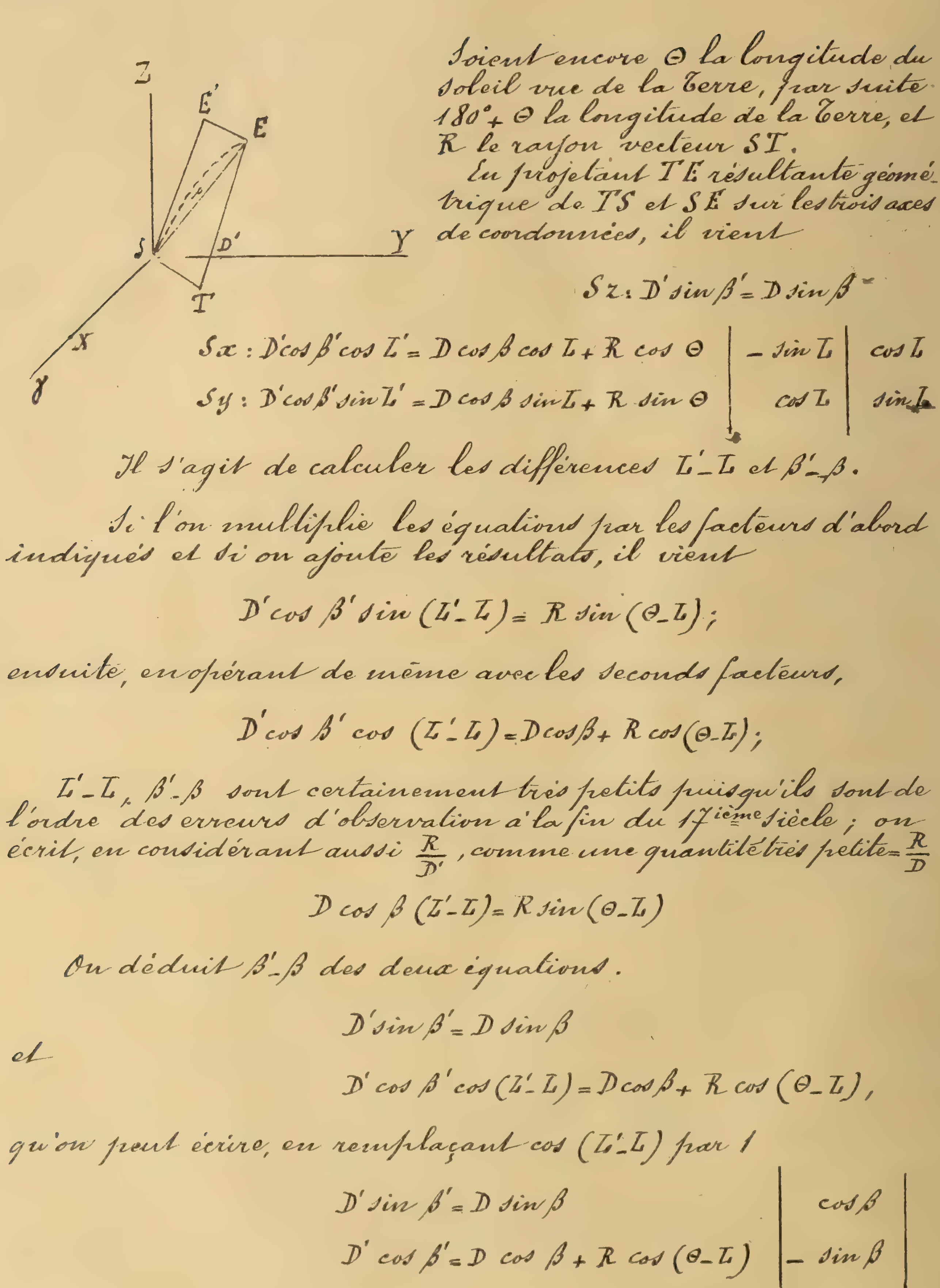
On ne doutait plus, de la vérité du système de Copernic, mais il subsistait des difficultés, et il était essentiel de les lever.

Tycho-Brahé avait élevé une objection contre le système de Copernic (Chapitre VII n°6): il avait fait remarquer que les positions apparentes des étoiles devraient offrir des variations sensibles dans l'hypothèse du mouvement de translation de la Terre.

Après l'invention des instruments à micromètre à la fin du 17ième siècle, les Astronomes durent chercher à éclaircir ce point important.

La vérification de la théorie de Newton concernant la figure de la Terre (Chapitre précédent, n°1) allait aussi provoquer de grands travaux géodésiques dans le cours du XVIIIième siècle

2. La théorie géométrique de la parallaxe consiste dans cette simple remarque que la direction TE suivant laquelle l'observateur attaché à la Terre T voit l'étoile E est la même que la direction SE', EE' étant parallèle égale à TS et de même direction; E' décrit autour de E une orbite égale à celle de S autour de T, dans un plan parallèle à celui de l'écliptique. Le déplacement dû à la parallaxe se produit à l'opposé de la Terre. Soient pour calculer l'effet de la parallaxe D, L et β les coordonnées écliptiques d'une étoile E vue du Soleil S supposé fixe dans l'espace, D', L', β' ces coordonnées rapportées à la Terre T qui se meut autour du Soleil dans l'écliptique



Soient encore Θ la longitude du soleil vue de la Terre, par suite $180° + \Theta$ la longitude de la Terre, et R le rayon vecteur ST.

En projetant TE résultante géométrique de TS et SE sur les trois axes de coordonnées, il vient

$$Sz : D' \sin\beta' = D \sin\beta$$

$$\begin{array}{ll|c|c} Sx : & D'\cos\beta'\cos L' = D\cos\beta\cos L + R\cos\Theta & -\sin L & \cos L \\ Sy : & D'\cos\beta'\sin L' = D\cos\beta\sin L + R\sin\Theta & \cos L & \sin L \end{array}$$

Il s'agit de calculer les différences $L' - L$ et $\beta' - \beta$.

Si l'on multiplie les équations par les facteurs d'abord indiqués et si on ajoute les résultats, il vient

$$D'\cos\beta'\sin(L'-L) = R\sin(\Theta - L);$$

ensuite, en opérant de même avec les seconds facteurs,

$$D'\cos\beta'\cos(L'-L) = D\cos\beta + R\cos(\Theta - L);$$

$L'-L$, $\beta'-\beta$ sont certainement très petits puisqu'ils sont de l'ordre des erreurs d'observation à la fin du 17[ième] siècle ; on écrit, en considérant aussi $\frac{R}{D'}$, comme une quantité très petite $= \frac{R}{D}$

$$D\cos\beta\,(L'-L) = R\sin(\Theta - L)$$

On déduit $\beta'-\beta$ des deux équations.

$$D'\sin\beta' = D\sin\beta$$

et

$$D'\cos\beta'\cos(L'-L) = D\cos\beta + R\cos(\Theta - L),$$

qu'on peut écrire, en remplaçant $\cos(L'-L)$ par 1

$$\begin{array}{l|c|} D'\sin\beta' = D\sin\beta & \cos\beta \\ D'\cos\beta' = D\cos\beta + R\cos(\Theta - L) & -\sin\beta \end{array}$$

Le procédé à suivre pour avoir $\beta' - \beta$ est le même que tout-à-l'heure ; il vient

$$D' \sin(\beta' - \beta) = - R \cos(\Theta - L) \sin\beta$$

d'où

$$\beta' - \beta = - \frac{R}{D} \cos(\Theta - L) \sin\beta$$

Posons

$$\frac{R}{D} = \sin\pi ,$$

l'orbite de la Terre, pour simplifier étant supposé circulaire, π est la parallaxe annuelle de l'étoile ; on peut écrire

$$\cos\beta\,(L' - L) = \pi \sin(\Theta - L)$$

$$\beta' - \beta = - \pi \cos(\Theta - L) \sin\beta$$

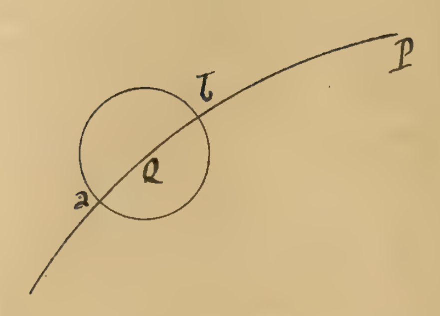
$\cos\beta\,(L' - L)$ et $\beta' - \beta$ sont les composantes du déplacement de l'étoile autour de sa position moyenne suivant l'écliptique et dans la direction perpendiculaire, sur la sphère céleste. Soient x et y ces deux déplacements, on a l'équation de l'ellipse appelée ellipse parallactique ;

$$\frac{x^2}{\pi^2} + \frac{y^2}{\pi^2 \sin^2\beta} = 1$$

L'étoile, comme il résulte de la théorie géométrique, paraîtra donc décrire en un an une petite ellipse dont le demi-grand axe est parallèle à l'écliptique et égal à la parallaxe annuelle ; le petit axe est nul pour les étoiles situées dans l'écliptique ; il augmente à mesure qu'on s'approche du pôle de l'écliptique.

Si l'on veut avoir l'effet de la parallaxe annuelle non plus sur les coordonnées $L\,\beta$ mais sur les coordonnées $R\,\delta$, il suffit d'écrire les relations entre les deux systèmes de coordonnées et de les différentier en y faisant dL et $d\beta$ égaux aux valeurs ci-dessus trouvées pour $L' - L$ et $\beta' - \beta$.

3 – Pour contrôler la théorie exposée, il était indiqué de considérer la variation des δ, en choisissant des étoiles voisines du pôle Q de l'écliptique ; pour ces étoiles en effet, l'ellipse parallactique devient un cercle ; les distances δ doivent présenter



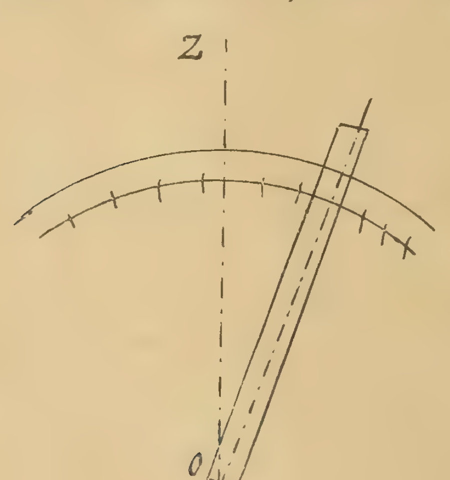
une différence atteignant le double de la parallaxe π pour les observations faites en a et b à 6 mois d'intervalle, aux deux points où le cercle de déclinaison passant par la position moyenne de l'étoile rencontre le cercle parallactique.

Vers la fin du 17ème siècle, on avait bien constaté des déplacements dans la position des étoiles avec les cercles muraux. mais ces déplacements ne s'accordaient pas avec la théorie de la parallaxe annuelle; ils se produisaient non pas à l'opposé de la Terre, comme l'indique la théorie (n°2), mais à angle droit.

On donna le nom d'aberration à ces changements encore inexpliqués dans la position apparente des étoiles.

Un irlandais, Molyneux, entreprit vers 1725 de vérifier ce qu'on avait dit là dessus et de déterminer enfin les circonstances de ces mouvements.

L'art des instruments était alors poussé beaucoup plus loin en Angleterre que sur le continent. Un artiste célèbre Georges Graham fit construire pour Molyneux un secteur zénithal de 8 mètres de rayon solidement établi dans le méridien. L'instrument à cause de la longueur du rayon convenait très bien pour mesurer dans le ciel de petites différences de distances zénithales; de plus, les mesures faites près du zénith n'étaient pas faussées par les incertitudes de la réfraction.



Ce secteur fut placé à Kew, près de Londres.

Bradley (1692-1762) exécuta ce que Molyneux avait entrepris.

Les observations de γ Dragon de Décembre 1725 à Décembre 1726 mirent en évidence une variation de distance zénithale d'environ 40", elle correspond sur le secteur de 8 mètres = 8000 mill. à $\frac{8000}{200.000} \times 40 = \frac{320000}{200000} = 1^{mm},6$

Bradley fit construire un secteur zénithal de plus grande amplitude pour observer d'autres étoiles; le premier secteur n'avait pas 1° d'amplitude.

La discussion de ses observations montra à Bradley que l'étoile paraissait toujours du côté où allait la Terre, en d'autres termes dans la direction de la vitesse de la Terre.

4. Enfin Bradley après avoir pensé à une oscillation possible de l'axe de la Terre, eut l'idée de combiner le mouvement de la lumière, dont Rœmer avait assigné la vitesse en 1675, avec celui de la Terre, suivant les lois de la composition des mouvements; il essaya cette hypothèse, et voyant qu'elle s'accordait parfaitement avec toutes les observations, il publia sa découverte au mois de Décembre 1728.

L'explication de Bradley est la suivante:

On observe, sur la Terre qui se meut avec la vitesse v, la direction du rayon lumineux venant de l'étoile et se propageant avec la vitesse V.

La vitesse relative du rayon par rapport à un système de comparaison lié à la Terre s'obtient en composant la vitesse V avec la vitesse égale et contraire à celle v du mouvement d'entraînement du système de comparaison. On prend sur TE, $Tc = V$.

E'
E
c'
c
V
v
T

Il suffit de mener cc' égale et parallèle à la vitesse v; alors $c'T$ est la résultante de $c'c$ $(-v)$ et de cT (V).

On voit que l'étoile paraît toujours du côté où va la Terre, à angle droit avec ce que donnerait la parallaxe annuelle.

De plus, d'après les évaluations de v et de V, qui donnent à peu près

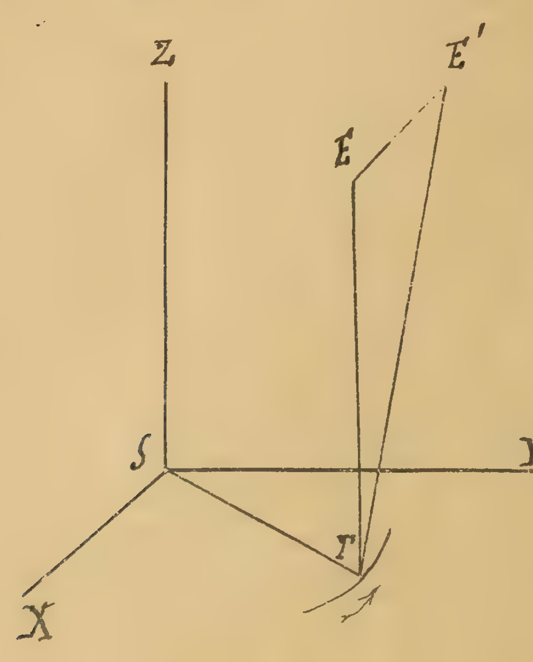
$$\frac{v}{V} = \frac{30 \text{ Kilomètres}}{300.000 \text{ Kilomètres}} = \frac{1}{10000}$$

la variation maximum de la direction de l'étoile au pôle de l'écliptique autour de sa position moyenne, est sensiblement de

$$\frac{v}{V} \times 206\,265'' = 20'',45$$

comme l'indiquent les observations; $\frac{v}{V} \times 206265''$ est ce qu'on appelle la constante d'aberration.

L'explication précédente est celle de Bradley ; elle s'appuie sur la théorie de l'émission alors adoptée, l'explication d'après la théorie des ondulations est donnée dans le cours de Physique.



5 – Pour obtenir les formules de l'aberration figurons la position T de la Terre et celle E de l'étoile.

On obtient la direction T E' de l'étoile en menant à partir de E dans le sens de la vitesse de la terre le segment E E' tel que

$$\frac{EE'}{v} = \frac{TE}{V} \text{ d'où } EE' = TE \frac{v}{V}.$$

L'orbite de la Terre étant supposée circulaire les cosinus des angles que la vitesse de la Terre fait avec les trois axes s'obtiendront par la différentiation des coordonnées

$$R\cos(L_0+nt),\ R\sin(L_0+nt),\ 0;$$

ce qui donne pour les composantes de la vitesse

$$-nR\sin(L_0+nt),\ +nR\cos(L_0+nt),\ 0;$$

on prendra pour les cosinus

$$-\sin(L_0+nt),\ +\cos(L_0+nt),\ 0,$$

ou en désignant par le symbole Θ la longitude du soleil vu de la Terre

$$+\sin\Theta, \qquad -\cos\Theta, \qquad 0.$$

En appelant comme plus haut $D\,L\,\beta\ D'L'\beta'$ les coordonnées de E E' et projetant sur les trois axes T E' résultante de T E et de E E', il vient

$$D'\sin\beta' = D\sin\beta$$

$$D'\cos\beta'\cos L' = D\cos\beta\cos L + D\frac{v}{V}\sin\Theta,$$

$$D'\cos\beta'\sin L' = D\cos\beta\sin L - D\frac{v}{V}\cos\Theta.$$

Elles coïncident avec les formules de parallaxe si dans celles-ci Θ est remplacé par $\Theta - 90°$ et R par $D\frac{v}{V}$, ou si l'on veut π par $\frac{v}{V} = 20'',45$ en secondes d'arc.

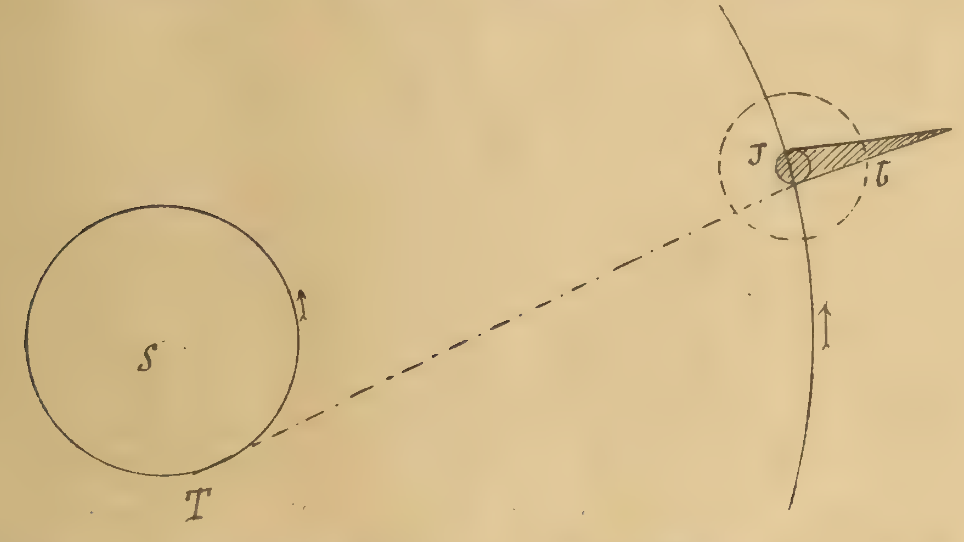
On en déduira, comme on l'a fait plus haut, les formules d'aberration

$$\cos\beta\,(L'-L) = 20'',45 \sin(\Theta - 90^\circ - L)$$

$$\beta' - \beta = -20'',45 \cos(\Theta - 90^\circ - L)\sin\beta$$

Les variations des coordonnées Æ et δ se déduiront de là.

6° - Vitesse de la lumière déduite par Rœmer de l'observation du 1er satellite de Jupiter - Jupiter a 4 satellites principaux (le 5ième trouvé en 1892 est extrêmement petit) qui tournent autour de la planète d'un mouvement à peu près uniforme dans des plans presque confondus avec



l'écliptique. Quand l'un des satellites traverse le cône d'ombre projeté par Jupiter, il y a éclipse du satellite pour l'hémisphère terrestre qui regarde Jupiter ; c'est la même chose que pour les éclipses de Lune.

On conçoit donc que l'on puisse assigner, comme dans le cas de la Lune, la période moyenne des éclipses.

Rœmer remarqua en 1675, en comparant les observations des éclipses du 1er satellite (qui ont lieu très fréquemment, la durée de révolution sidérale de ce satellite est 1jour,77), faites pendant plusieurs années successives, que certaines éclipses arrivaient un peu plus tôt que l'époque de la prédiction déduite par le calcul du résultat moyen de toutes les observations ; que d'autres arrivaient un peu plus tard. Il reconnut que les éclipses hâtives avaient lieu quand Jupiter se trouvait en opposition à proximité de la Terre, et les éclipses tardives quand la Terre était très éloignée de Jupiter.

Rœmer fut donc conduit à admettre que les écarts entre les époques observées et calculées étaient en relation avec la distance de la Terre à Jupiter ; que la lumière ne se transmettait pas instantanément.

S'il en est ainsi, soient

t, t' les époques calculées d'éclipses observées aux époques $\theta\,\theta'$ on devra trouver si TJ, $T'J'$ sont les positions correspondantes de la Terre et de Jupiter

$$\theta = t + \frac{TJ}{V}$$

$$\theta' = t' + \frac{T'J'}{V}$$

d'où

$$\theta' - \theta = t' - t + \frac{T'J' - TJ}{V}$$

L'intervalle $t' - t$ est facile à calculer ; il comprend un nombre entier de révolutions synodiques du satellite.

On a donc le temps nécessaire pour parcourir la différence des distances $T'J'$ et TJ ou comme les rapports de ces distances au rayon de l'orbite terrestre sont connus (par la troisième loi de Kepler), on a le temps nécessaire pour que la lumière parcoure la distance moyenne de la Terre au Soleil.

Les déterminations les plus récentes fixent cet intervalle de temps à 500^s environ.

7. Manière de tenir compte de la propagation successive de la lumière dans le calcul des positions apparentes des planètes — D'après ce qui a été dit, on ne doit pas voir une planète à la place calculée sans tenir compte de la vitesse de la lumière ; mais la correction est facile à faire en remarquant que si l'on appelle Δ la distance de l'astre à la Terre exprimée en parties de l'unité astronomique, la distance moyenne de la Terre au Soleil, et τ le temps d'aberration ou temps que la lumière met à parcourir la distance Δ, c'est-à-dire

$$\tau = \Delta \times 500^s,$$

la position apparente de la planète au temps t sera la position réelle qu'elle avait au temps $t - \tau$, à l'époque où la lumière qui nous arrive a été émise.

Ainsi, dans le cas du soleil, la longitude apparente doit être plus petite que la longitude calculée sans tenir compte de la vitesse de la lumière, de

$$\frac{2\pi}{T} \times \tau = \frac{2\pi}{T} \times 500^s = \frac{2\pi}{T}\,\frac{a}{V} = \frac{v}{V} = 20'',45 \text{ (en secondes)}$$

8. Équations de condition résultant des théories précédentes et permettant de conclure la distance de la Terre au soleil.

On vient de trouver que

v étant la vitesse de la Terre dans son orbite soit $v = \frac{2\pi a}{T}$, en prenant l'orbite circulaire, et V la vitesse de la lumière, on a

$$V = \frac{a}{500^s},$$

$$\frac{v}{V} \times 206265'' = 20''45 = \frac{2\pi a}{VT} \times 206265''$$

Ce sont deux équations de condition propres, la seconde surtout (à cause de la plus grande précision des observations) à déterminer a, si V est supposé connu.

La vitesse de la lumière V a été mesurée directement par les Physiciens à la surface de la Terre (MM. Fizeau, Foucault, Cornu, Newcomb) avec une grande précision; on peut admettre en chiffres ronds $V = 300,000$ Kilomètres (par seconde)

Remarque. De la relation approchée

$$\frac{v}{V} = \frac{1}{10000} \text{ et de } V = 300,000 \text{ Kilomètres}$$

on déduit la vitesse v de la Terre dans son orbite

$$v = 30 \text{ Kilomètres environ (par seconde)}$$

9. Portée théorique de la découverte de Bradley.

Bradley n'a pas trouvé de parallaxe annuelle sensible pour les étoiles. En tenant compte de l'incertitude possible des observations faites par Bradley avec son secteur zénithal, qui ne pouvait guère dépasser 1'', cela voulait dire que contrairement à la croyance de Tycho-Brahé, les étoiles, d'une manière générale, étaient extrêmement éloignées du système solaire. En effet, on a

$$\sin \Pi = \frac{R}{D} \quad D = \frac{R}{\sin \Pi}$$

et, en faisant $\pi = 1''$ $\sin \pi = \frac{1}{206265''}$

$$D = 200.000\, R \text{ (sensiblement)}$$

Cette conclusion est très importante ; car on est fondé, à cause de cette immense distance des étoiles, à admettre qu'elles ne troublent pas le mouvement relatif des planètes autour du Soleil.

On verra plus loin que les masses des étoiles paraissent comparables à celles du Soleil ; de sorte que le grand éloignement des étoiles suffit pour écarter l'idée d'une action sensible des étoiles sur notre système.

D'autre part, s'il est vrai que l'aberration est produite par la combinaison de la vitesse de la lumière avec la vitesse de la Terre, on a une preuve — la première — du mouvement de translation de la Terre.

La constante de l'aberration $\frac{v}{V} \times 206265''$ est un des nombres fondamentaux de l'Astronomie.

Elle a été souvent déterminée depuis Bradley. La valeur adoptée 20"45 a été fixée par l'astronome russe W. Struve à l'observatoire central de Poulkova.

10. Découverte de la nutation de l'axe terrestre par Bradley. Pendant ses premières observations, vers 1727, Bradley avait aperçu de légers écarts entre l'observation et la nouvelle théorie de l'aberration. Il continua d'observer avec persévérance toutes les circonstances des changements de distance polaire sur un grand nombre d'étoiles.

Chaque année, il voyait les changements causés par l'aberration se produire conformément aux formules ; mais d'une année à l'année suivante, il y avait d'autres différences.

Il soupçonna que l'action de la Lune sur le renflement équatorial pouvait causer une variation dans l'axe de la Terre. En 1736, à la fin d'une demi-révolution des nœuds de la Lune, il reconnut l'existence de cette variation appelée nutation. Enfin, en 1745, la révolution des nœuds de la Lune étant complétée, les étoiles assez nombreuses qu'il observait étaient revenues aux mêmes points, sauf l'effet de la précession ; on voyait les mêmes phénomènes qu'en 1727. Bradley ne douta plus que la nutation de l'axe terrestre en fût la véritable cause.

En supposant que l'axe de la Terre décrivait autour de

sa position moyenne un cône circulaire d'une ouverture égale à 17" d'un mouvement rétrograde, dans l'intervalle 18 ans $\frac{2}{3}$, de la révolution du nœud ascendant de la Lune, Bradley trouva que ses observations étaient bien représentées.

L'explication mécanique de la nutation fut donnée par D'Alembert dans son Traité de la précession des Equinoxes, peu après l'annonce de la découverte de Bradley. D'Alembert trouva que le pôle vrai de la Terre décrivait non pas un cône à base circulaire mais un cône à base elliptique dont le grand axe passe constamment par le pôle moyen de la Terre et par le pôle de l'écliptique. Les observations de Bradley se trouvaient ainsi mieux représentées.

La nutation ne fait varier que le plan de l'équateur, les latitudes célestes β des étoiles ne sont pas modifiées; mais les longitudes L et l'obliquité ω subissent de petites variations périodiques dont les termes principaux sont

$$dL = -17'' \sin \Omega$$

$$d\omega = +9'' \cos \Omega$$

Ω désignant la longitude du nœud ascendant de la Lune.

Si l'on veut avoir l'effet de la nutation sur les coordonnées d'observation $\mathcal{R}$ et δ, il suffira de différentier les expressions des coordonnées $\mathcal{R}$ et δ, en donnant à dL, $d\omega$ les valeurs ci-dessus et faisant $d\beta = 0$.

11. Catalogues d'étoiles - Coordonnées moyennes et coordonnées apparentes des étoiles -

Quand on a besoin de la position d'une étoile d'un Catalogue, par exemple pour l'observation d'un astre nouveau qui doit être rapporté à une étoile de comparaison (Chap. V, n° 14), on calcule d'abord les coordonnées moyennes pour le commencement de l'année courante; puis il faut appliquer les petites corrections d'aberration et de nutation pour le jour de l'observation. Les coordonnées sont les coordonnées apparentes de l'étoile.

La grande importance de l'aberration et de la nutation tient à ce qu'elles affectent les positions de tous les astres.

Les coordonnées moyennes des étoiles sont celles qu'on a en faisant abstraction de l'aberration et de la nutation, et tenant compte uniquement de la précession (Chap. V n° 15).

Chapitre XIV.

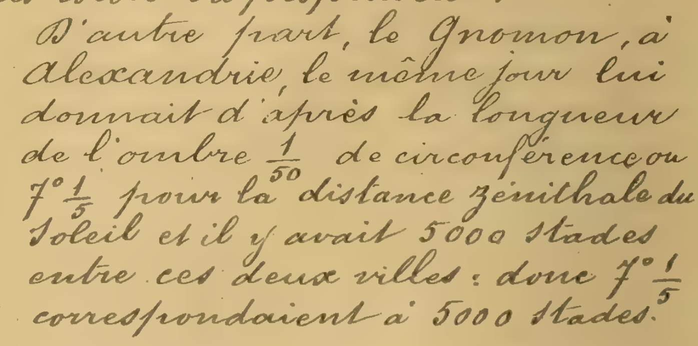
Problème géodésique - Généralités. Théorème de Legendre.

1. La Géodésie a deux objets, l'un général, la détermination de la figure et des dimensions du globe terrestre : en mettant à profit toutes les déterminations des coordonnées géographiques et les conséquences de la théorie de Newton ; l'autre particulière, la description géométrique des grands Etats, qui doit s'appuyer sur un nombre suffisant de repères bien déterminés

2. Anciennes mesures de la Terre supposée sphérique.

Le principe est le suivant : l'angle des verticales de deux stations est à quatre angles droits comme la distance mesurée des stations est à la circonférence entière.

Eratosthènes (250 ans avant J.C.) résolut ainsi le problème. Les deux stations étaient Alexandrie et Syène dans la Haute Egypte, à peu près sur le même méridien. Il observa qu'à Syène le Soleil à midi, dans le plus long jour de l'année (au Solstice) passait par le Zénith ; toutes les ombres disparaissaient au moment de midi, il y avait un puits que le Soleil éclairait dans toute sa profondeur.



D'autre part, le Gnomon, à Alexandrie, le même jour lui donnait d'après la longueur de l'ombre $\frac{1}{50}$ de circonférence ou $7^\circ\frac{1}{5}$ pour la distance zénithale du Soleil et il y avait 5000 stades entre ces deux villes : donc $7^\circ\frac{1}{5}$ correspondaient à 5000 stades.

On ne peut pas comparer le résultat d'Eratosthènes aux mesures modernes dans l'ignorance où l'on est de la valeur du stade.

Les premières mesures précises sont dues à Picard (1670) au moyen de la méthode de triangulation d'abord employée par Snellius, en Hollande, en 1617 ; elles montrèrent que le rayon de la Terre considérée comme sphérique est d'environ 6400 Kilomètres.

3_ Mouvement de rotation de la Terre sur elle-même.

C'est depuis Copernic (1473-1543) que la notion du mouvement de rotation de la Terre est devenue familière: elle a été admise d'abord comme possible et probable; tous les phénomènes, par la suite, l'ont confirmée.

Copernic dans son livre. De Revolutionibus orbium cœlestium, Nuremberg 1543, montrait que cette idée avait été admise par plusieurs philosophes de l'antiquité, et qu'on pouvait expliquer ainsi plus simplement le mouvement diurne du ciel: il est plus simple en effet de supposer que la terre tourne autour d'un diamètre parallèle à l'axe du monde et dans le sens direct que de faire tourner tous les astres du ciel dans la direction contraire.

Toutefois, il n'y avait pas là une démonstration, et les savants étaient partagés.

Tycho-Brahé (1546-1601) propose plusieurs objections, et demande, par exemple, comment il peut se faire qu'un boulet jeté du haut d'une tour tombe toujours (exactement) dans le point qui lui répond perpendiculairement au pied de la tour, si la Terre a un mouvement diurne.

L'expérience était trop difficile à exécuter, eu égard aux petites quantités à mesurer, et ne pouvait donner de résultat pas plus que celle qui consistait à voir où retomberait un boulet de canon qui serait lancé perpendiculairement vers le zénith.

On doit à Foucault des expériences montrant nettement le mouvement de rotation de la Terre. L'idée de l'expérience du pendule exécutée autrefois au Panthéon et reprise depuis peu est très simple. Une boule suspendue à un fil attaché à un point au dessus de l'un des pôles, de manière à pouvoir osciller indifféremment dans n'importe quel plan doit avoir un plan d'oscillation invariable dans l'espace, mais ce plan d'oscillation pour un observateur lié à la Terre doit tourner autour de la ligne des pôles.

La théorie de la déviation des projectiles vers l'Est et celle du pendule de Foucault ont été données dans le Cours de Mécanique de 1ière année; celle du gyroscope est donnée dans le cours de 2ième année.

Jusqu'ici l'hypothèse d'un mouvement uniforme de rotation de la Terre n'a jamais été contredite par les observations.

4. Prévisions théoriques de Newton concernant la figure de la Terre. – Newton, dans le livre des principes (1687), en adoptant la mesure de Picard comme la plus exacte et la plus sûre, montrait cependant la nécessité de la compléter par d'autres. Notre globe, en effet, animé d'un mouvement de rotation et liquide en grande partie à la surface ne saurait conserver la forme d'une sphère; il doit être renflé à l'équateur, l'équilibre des mers l'exige, et Newton n'a pas craint d'ajouter que l'état primitivement fluide de la croûte solide actuelle a dû la soumettre aux mêmes lois. C'est donc comme conséquence de considérations théoriques pendant longtemps contestées, il est vrai, sur le continent, que l'aplatissement de la Terre a été pour la première fois annoncé aux astronomes . . . La solution de Newton assignerait à la Terre la forme d'un ellipsoïde de révolution, et à l'aplatissement, rapport de la différence des axes au plus grand d'entre eux, la valeur $\frac{1}{230}$, qui n'est d'ailleurs proposée par lui que comme une première approximation. . . (1)

Il était du plus grand intérêt de soumettre les conclusions de Newton au contrôle de l'expérience.

5. Premières expéditions géodésiques. – Pour trancher la question, l'Académie des Sciences de Paris fit mesurer deux arcs de méridien, l'un à l'équateur, l'autre dans les régions polaires. Une première expédition, composée de La Condamine, Bouguer et Godin, partit en 1735, pour le Pérou, et mesura dans le voisinage de Quito un arc de 3°7'.

En 1736, Maupertuis et Clairaut se rendirent en Laponie, et mesurèrent près de Tornéa, un arc de 1°. On trouva pour l'arc de 1°

au Pérou 56753 toises

en Laponie 57437 "

Picard avait trouvé 57060 "

Cela confirmait l'aplatissement de la Terre au pôle.

---

(1) Article de Mr Bertrand. p. 698.

6. Surface mathématique de la Terre. Géoïde. Hypothèse de l'ellipsoïde de révolution. Substitution de triangles sphériques aux triangles formés par des lignes géodésiques.

La surface de la mer supposée tranquille est celle que l'on considère; on la prolonge sous les continents, par la condition de couper à angle droit les directions de la pesanteur en tous ses points. Cette surface idéale s'appelle aussi géoïde.

Il faudrait pouvoir déterminer les coordonnées astronomiques, colatitude et longitude, aux divers points du géoïde; mais on ne peut le faire sur la surface de la mer avec une précision suffisante, et, sur les continents, on ne le pourrait rigoureusement qu'aux points où le géoïde rencontre la surface physique de la terre. Toutefois, si l'on remarque qu'il n'y a pas une différence notable entre le géoïde et la surface physique de la terre, puisque les fleuves qui communiquent avec les mers n'ont jamais une pente très considérable, et que la surface des continents suit l'inclinaison des fleuves, on pourra admettre, dans une première approximation, que la verticale d'une station est encore la verticale du géoïde au point où elle le rencontre.

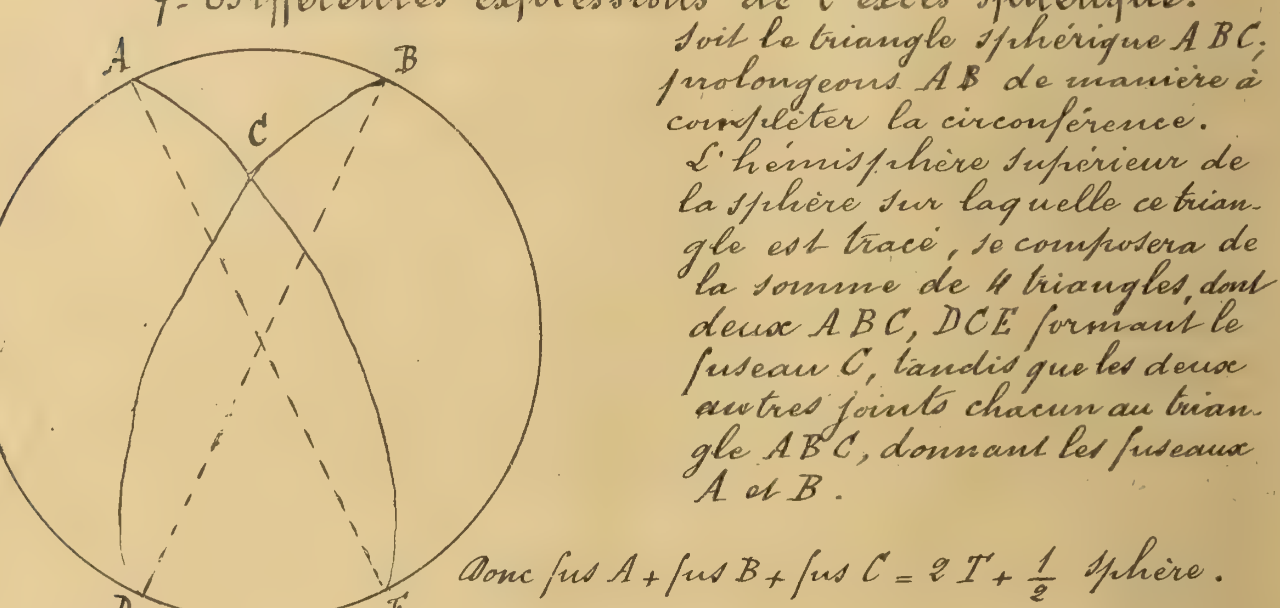
Pour commencer, comme première approximation indiquée par la théorie de Newton, les géodésiens admettent que le géoïde est un ellipsoïde de révolution, et ils cherchent à déterminer cet ellipsoïde en mesurant des arcs de méridiens à diverses latitudes et aussi des arcs de parallèles. La mesure d'un arc ne se fait pas directement, mais par l'intermédiaire d'un réseau de triangles à cheval sur l'arc à mesurer; on mesure d'abord sur un terrain uni une base AB; on forme ensuite avec les deux extrémités A et B de la base et d'autres points C, D, . . . tels que de C on voie A et B, de D, B, C, ... le réseau de triangles.

Il faudrait ensuite projeter sur le géoïde ou sur la surface de l'ellipsoïde les éléments de la base et des trajectoires suivies par les rayons lumineux en allant d'un sommet à un autre. Mais la petitesse des côtés des triangles permet de remplacer la projection sur l'ellipsoïde d'un triangle tel que ABC, par le triangle sphérique situé sur une sphère tangente à l'ellipsoïde suivant le parallèle de A, par exemple, et dont les sommets s'appuient sur les verticales des stations A, B, C. On a ainsi à considérer de simples triangles sphériques sur une série de sphères, tandis qu'en projetant sur l'ellipsoïde on aurait eu des triangles formés par des lignes à double courbure, des lignes géodésiques.

Les angles dièdres d'un triangle situé sur la sphère peuvent, d'autre part, être pris égaux, sans erreur sensible, aux angles mesurées avec le limbe horizontal du théodolite ou avec le cercle azimutal, en visant les différents sommets du triangle. L'ellipsoïde de révolution représentant le mieux les observations n'est du reste qu'une première approximation; il joue le rôle de surface de comparaison à laquelle on rapportera le géoïde, dont on s'occupe maintenant d'étudier les petites irrégularités, comme on le dira plus loin.

Résolution des triangles géodésiques. Théorème de Legendre.

7. Différentes expressions de l'excès sphérique.



Soit le triangle sphérique ABC; prolongeons AB de manière à compléter la circonférence. L'hémisphère supérieur de la sphère sur laquelle ce triangle est tracé, se composera de la somme de 4 triangles, dont deux ABC, DCE formant le fuseau C, tandis que les deux autres joints chacun au triangle ABC, donnant les fuseaux A et B.

Donc fus A + fus B + fus C = $2T + \frac{1}{2}$ sphère.

Or

$$\frac{\text{fus } A}{\text{sphère}} = \frac{A}{360^\circ}, \quad \frac{\text{fus } B}{\text{sphère}} = \dots \quad \frac{2T}{\text{sphère}} = \frac{2T}{4\pi R^2}$$

On aura donc, en remarquant que l'hémisphère a alors pour surface $\frac{1}{2}$:

$$\frac{A}{360^\circ} + \frac{B}{360^\circ} + \frac{C}{360^\circ} - \frac{2T}{4\pi R^2} = \frac{1}{2},$$

d'où

$$A + B + C = 180^\circ + \frac{360^\circ}{2\pi} \cdot \frac{T}{R^2} = 180^\circ + 206\,265'' \frac{T}{R^2}$$

L'expression habituelle de l'excès sphérique est

$$E = A + B + C - 180\,;$$

On a donc aussi cette autre expression

$$E = 206265'' \frac{T}{R^2}$$

8. Triangles géodésiques — On appelle ainsi des triangles sphériques dont les côtés sont très petits par rapport au rayon de la sphère; ce sont les triangles que l'on a à considérer en Géodésie: Ils sont presque plans et l'excès sphérique ne dépasse pas quelques secondes.

En prenant comme valeur moyenne de la longueur du côté d'un triangle géodésique 40 Kilomètres, le rapport au rayon du globe terrestre de 6400 Kilomètres, sera

$$\frac{40}{6400} = \frac{1}{160}\,.$$

Le rapport $\frac{T}{R^2}$ de la surface du triangle au carré du rayon sera comparable au carré de $\frac{1}{160} = \frac{1}{25600}$; l'excès sphérique $206265''\frac{T}{R^2}$ sera donc de quelques secondes.

9. Théorème de Legendre — Si l'on considère les rapports des longueurs des côtés a, b, c d'un triangle sphérique au rayon R de la sphère comme des quantités du premier ordre de petitesse, en négligeant les quantités du 4ième ordre, les angles du triangle sphérique sont égaux à ceux du triangle plan de côtés a, b, c augmentés du tiers de l'excès sphérique.

a, b, c étant les longueurs des côtés rapportées à une unité de longueur arbitraire ainsi que R rayon de la sphère, les côtés, rapportés au rayon pris comme unité, seront

$$\frac{a}{R},\ \frac{b}{R},\ \frac{c}{R}\,;$$

ce sont les quantités qui doivent figurer dans les formules de trigonométrie sphérique. Soit encore

$$a + b + c = 2p\,;$$

on aura, par exemple

$$tg\,\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{p-b}{R}\,\sin\frac{p-c}{R}}{\sin\frac{p}{R}\,\sin\frac{p-a}{R}}}$$

On développera $\sin\frac{p-b}{R}$ .. par la formule

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} \dots,$$

Comme si l'on voulait passer des formules de trigonométrie sphérique à celles de trigonométrie plane, en faisant croître à l'infini le rayon R de la sphère :

$$\frac{\sin\frac{p-b}{R}\,\sin\frac{p-c}{R}}{\sin\frac{p}{R}\,\sin\frac{p-a}{R}} = \frac{\frac{p-b}{R}\left[1-\frac{(p-b)^2}{6R^2}\right]\frac{p-c}{R}\left[1-\frac{(p-c)^2}{6R^2}\right]}{\frac{p}{R}\left[1-\frac{p^2}{6R^2}\right]\frac{p-a}{R}\left[1-\frac{(p-a)^2}{6R^2}\right]}$$

$$= \frac{(p-b)(p-c)}{p\,(p-a)}\left[1+\frac{p^2+(p-a)^2-(p-b)^2-(p-c)^2}{6R^2}\right]$$

Les termes qui viendraient ensuite dans le [ ] auraient R^4, R^6.. en dénominateur

Simplifiant le crochet, on a

$$\begin{aligned} p^2+(p-a)^2-(p-b)^2-(p-c)^2 &= -2pa+a^2 \\ &\quad +2pb-b^2 \\ &\quad +2pc-c^2 \\ &= (a+b+c)(b+c-a)+a^2-b^2-c^2 \\ &= (b+c)^2-a^2+a^2-b^2-c^2 = 2bc. \end{aligned}$$

Si l'on appelle A', B', C' les angles du triangle plan dont les côtés ont les longueurs a, b, c, il vient donc

$$tg\,\frac{1}{2}A = \left(1+\frac{bc}{3R^2}\right)^{\frac{1}{2}} tg\,\frac{1}{2}A' = \left(1+\frac{bc}{6R^2}\right) tg\,\frac{1}{2}A'.$$

Les termes qui viendraient ensuite dans la ( ) auraient R^4, R^6, en dénominateur.
En appliquant la formule de Lagrange (chapitre I. n° 29)

$$tg\,x = \frac{1-m}{1+m}\,tg\,y.$$

m étant donné ici par la condition

$$\frac{1-m}{1+m} = 1 + \frac{bc}{6R^2}, \text{ d'où } m = -\frac{bc}{12R^2} + \ldots$$

il vient

$$\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}A' + \frac{bc}{12R^2}\sin A' + \ldots$$

$$A = A' + \frac{bc\sin A'}{6R^2} + \ldots$$

On ne néglige ainsi que des termes $\frac{1}{R^4}$, $\frac{1}{R^6}$ ...

Si l'on désigne par T' la surface du triangle plan, on a

$$T' = \frac{1}{2}bc\sin A',$$

En évaluant les angles en secondes, il vient donc

$$A - A' = \frac{1}{3}\,206265''\,\frac{T'}{R^2}.$$

De même

$$B - B' = \frac{1}{3}\,206265''\,\frac{T'}{R^2},$$

$$C - C' = \frac{1}{3}\,206265''\,\frac{T'}{R^2}.$$

Les différences des angles A-A'.. sont donc les mêmes.
En faisant la somme, on trouve

$$A + B + C - 180° = 206265''\,\frac{T'}{R^2};$$

On a déjà trouvé pour l'excès sphérique du premier membre

$$\mathcal{E} = 206265''\,\frac{T}{R^2};$$

Donc, au degré d'approximation employé, c'est-à-dire en négligeant les termes en $\frac{1}{R^4}, \frac{1}{R^6}, \ldots$

$$\frac{T'}{R^2} = \frac{T}{R^2}$$

et

$$A = A' + \frac{1}{3}\,\mathcal{E},$$

$$B = B' + \frac{1}{3}\,\mathcal{E},$$

$$C = C' + \frac{1}{3}\,\mathcal{E}.$$

10. Usage du théorème Legendre. Erreurs de fermeture des triangles. On a surtout à traiter les deux cas suivants.

1° On a mesuré les trois angles du triangle géodésique ABC et mesuré ou calculé un côté a; on demande les autres côtés b, c.

Soient A', $B'C'$ les angles du triangle plan correspondant, $\mathcal{E}$ l'excès sphérique; on a

$$\mathcal{E} = A + B + C - 180°,$$

$$A' = A - \frac{1}{3}\,\mathcal{E}, \qquad B' = B - \frac{1}{3}\,\mathcal{E}, \qquad C' = C - \frac{1}{3}\,\mathcal{E},$$

ensuite

$$\frac{a}{\sin A'} = \frac{b}{\sin B'} = \frac{c}{\sin C'};$$

on déduira de là b et c.

Remarque. La différence $A + B + C - 180°$ comprend en fait l'excès sphérique $\mathcal{E}$ plus la somme α des erreurs d'observation. Selon la théorie des probabilités, comme on le verra plus loin, ces erreurs doivent être réparties également sur les trois angles du triangle plan si les mesures sont faites dans les mêmes conditions de précision; par conséquent, pour avoir les angles du triangle plan, il suffit de retrancher de chacun des angles le $\frac{1}{3}$ de $\mathcal{E}$ et le $\frac{1}{3}$ de α c'est-à-dire le tiers de la différence brute.

$$A + B + C - 180°.$$

2°. On connait un côté a et les deux angles adjacents B et C ; on demande de calculer b, c et A.

Dans ce cas, on se sert de la seconde expression de l'excès sphérique

$$\mathcal{E} = 206265'' \frac{T}{R^2} = 206265'' \frac{T'}{R^2}$$

On a

$$T' = \frac{1}{2}\, ab \sin C'$$

et, à cause de

$$\frac{a}{\sin A'} = \frac{b}{\sin B'}$$

$$T' = \frac{1}{2}\, a^2\, \frac{\sin B'}{\sin A'} \sin C'$$

$$\frac{T'}{R^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{R}\right)^2 \frac{\sin B' \sin C'}{\sin (B'+C')}$$

$$\mathcal{E} = 206265'' \frac{T'}{R^2} = \frac{206265''}{2} \left(\frac{a}{R}\right)^2 \frac{\sin B' \sin C'}{\sin (B'+C')}$$

A cause de la petitesse de l'excès sphérique, il revient au même de faire le calcul du second membre en mettant les angles B, C à la place de $B' = B - \frac{1}{3}\mathcal{E}$, $C' = C - \frac{1}{3}\mathcal{E}$; il n'y a pas de différence sensible.

On obtient ainsi la valeur exacte de l'excès sphérique, tandis que la formule $\mathcal{E} = A + B + C - 180$ comprend les erreurs d'observation de A, B, C.

Ayant calculé $\mathcal{E}$, et B'C', les analogies des sinus

$$\frac{a}{\sin A'} = \frac{b}{\sin B'} = \frac{c}{\sin C'} = \frac{a}{\sin (B'+C')}$$

feront connaître b. c et $A = A' + \frac{1}{3}\mathcal{E}$.

On fait aussi le calcul des excès sphériques par cette méthode, même dans le cas où les trois angles sont mesurés ; la différence des deux valeurs donne ce qu'on appelle l'erreur de fermeture.

Calcul des différents éléments de l'ellipsoïde terrestre.

11. Soient a et b les demi-axes de l'ellipse méridienne, b étant l'axe polaire on a $a > b$.

On appelle aplatissement μ de l'ellipse méridienne le rapport

$$\mu = \frac{a-b}{a};$$

et excentricité e le rapport

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

Remarque - μ et e sont de petites quantités μ est environ $\frac{1}{300}$. On a à peu près $e^2 = 2\mu$, à cause de

$$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{a-b}{a}\,\frac{a+b}{a} = 2\,\frac{a-b}{a} = 2\mu = \frac{1}{150} \text{ (à peu près)}$$

12. - Rayon de la sphère tangente à l'ellipsoïde le long d'un parallèle - Grande normale - On a vu qu'on projetait sur la sphère tangente à l'ellipsoïde le long du parallèle de A, le triangle dont l'un des sommets se projette en A sur l'ellipsoïde (N° 6)

Si l'on mène la normale AN à l'ellipse, faisant l'angle λ avec l'axe OP, AN est le rayon de cette sphère. On l'appelle la grande normale.

L'équation ordinaire de l'ellipse est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ou, en remplaçant b^2 par $b^2 = a^2(1-e^2)$,

$$y^2 + (1-e^2)\,x^2 = a^2(1-e^2).$$

Le coëfficient angulaire de la tangente en A est

$$\frac{dy}{dx} = -(1-e^2)\,\frac{x}{y} = -\operatorname{tg}\lambda.$$

Comme on a, pour le rayon AI du parallèle

$$AI = N \sin \lambda = x,$$

il vient

$$y = (1-c^2)\, x \operatorname{cotg} \lambda = (1-c^2)\, N \cos \lambda$$

En portant dans l'équation de l'ellipse les valeurs de x, y exprimées en fonction de N et λ, on a

$$(1-c^2)^2 N^2 \cos^2 \lambda + (1-c^2) N^2 \sin^2 \lambda = a^2 (1-c^2)$$

$$\left[(1-c^2)\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda\right] N^2 = a^2$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-c^2 \cos^2 \lambda}}$$

Le rayon N de la sphère tangente à l'ellipsoïde varie donc entre

$$a \text{ et } \frac{a}{\sqrt{1-c^2}} = a\left(1 + \frac{1}{2} c^2\right) = a(1+\mu).$$

Dans l'application du théorème de Legendre, le rayon de la sphère doit être remplacé par N; μ étant très petit, les variations de N ont une très petite influence.

13 - Rayon de courbure - Longueur d'un arc d'ellipse.

Le rayon de courbure de l'ellipse au point A a pour expression

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}} = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2} \; \frac{y - x\frac{dy}{dx}}{y^2}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2} \; \frac{y + \frac{b^2 x^2}{a^2 y}}{y^2} = -\frac{b^2}{a^2} \, \frac{a^2 b^2}{a^2 y^3} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$$

En y substituant les valeurs de x, y en fonction de N et λ, et remplaçant b^2 par $b^2 = a^2(1-e^2)$, il vient

$$a^4 y^2 + b^4 x^2 = a^4 (1-e^2)^2 N^2 \cos^2\lambda + a^4 (1-e^2)^2 N^2 \sin^2\lambda$$
$$= a^4 (1-e^2)^2 N^2$$
$$R = \frac{a^6(1-e^2)^3 N^3}{a^4 b^4} = \frac{a^6(1-e^2)^3 N^3}{a^8(1-e^2)^2} = \frac{N^3(1-e^2)}{a^2}$$

La différentielle de l'élément d'arc est

$$ds = R\,d\lambda\,;$$

on a donc

$$ds = a(1-e^2)(1-e^2\cos^2\lambda)^{-\frac{3}{2}}\,d\lambda$$

On développe $(1-e^2\cos^2\lambda)^{-\frac{3}{2}}$ par la formule du binôme, suivant les puissances ascendantes de la petite quantité e^2 ($=\frac{1}{150}$ environ)

$$(1-e^2\cos^2\lambda)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}e^2\cos^2\lambda + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)}{1.2}e^4\cos^4\lambda + \ldots$$
$$= 1 + \frac{3}{2}e^2\cos^2\lambda + \frac{15}{8}e^4\cos^4\lambda + \ldots.$$

et on remplace les puissances des cosinus par les cosinus d'arcs multiples au moyen de la relation

$$2\cos^2\lambda = \cos 2\lambda + 1,$$

puis de celle obtenue en élevant au carré

$$4\cos^4\lambda = \cos^2 2\lambda + 2\cos 2\lambda + 1,$$
$$4\cos^4\lambda = \frac{\cos 4\lambda + 1}{2} + 2\cos 2\lambda + 1,$$

et des relations analogues, il vient

$$ds = a(1-e^2)(M + N\cos 2\lambda + P\cos 4\lambda + \ldots)\,d\lambda$$

dans laquelle on a posé pour abréger

$$M = 1 + \frac{3}{4} c^2 + \frac{45}{64} c^4 + \dots$$

$$N = \frac{3}{4} c^2 + \frac{60}{64} c^4 + \dots$$

$$P = \frac{15}{64} c^4 + \dots$$

En général le coëfficient de $\cos 2 i \lambda$ est une série ordonnée suivant les puissances de c^2 et commençant par un terme en c^{2i}.

Si l'on intègre de λ à λ', il vient pour l'arc d'ellipse correspondant

$$s = a(1-c^2)\left[M(\lambda'-\lambda) + \frac{1}{2} N(\sin 2\lambda' - \sin 2\lambda) + \frac{1}{4} P(\sin 4\lambda' - \sin 4\lambda) + \dots\right].$$

Chapitre XV.

Opérations sur le terrain.

1. La marche des opérations est la suivante.

On mesure sur le sol, avec une très grande précision, une base AB, de 5 à 10 Kilomètres ; c'est la partie la plus délicate du travail.

On forme avec les points AB et d'autres C, D, .. tels que de chacun d'eux on voie les deux précédents, une chaîne de triangles, et en chacun des sommets on mesure les angles horizontaux compris entre les différentes directions, et les distances zénithales correspondant à chacune de ces directions.

On détermine, par des observations astronomiques, la colatitude et la longitude d'un sommet ainsi que l'azimut d'un des côtés issus de ce sommet, ces déterminations sont habituellement faites pour plusieurs sommets.

Cela posé, le calcul des triangles sphériques situés sur les sphères tangentes à l'ellipsoïde et remplaçant les triangles de l'espace fait connaître les longueurs des côtés des triangles. si l'on a mesuré au moins deux chaînes, le calcul permet de déterminer les éléments de l'ellipsoïde terrestre et ensuite les coordonnées de tous les sommets de la triangulation.

L'opération du nivellement géodésique utilise les mesures des distances zénithales faites en chaque sommet. Une fois obtenue la hauteur de l'un des sommets au dessus du niveau de la mer, le calcul permet d'obtenir de proche en proche les différences d'altitude des sommets et par suite leurs altitudes au dessus du niveau de la mer.

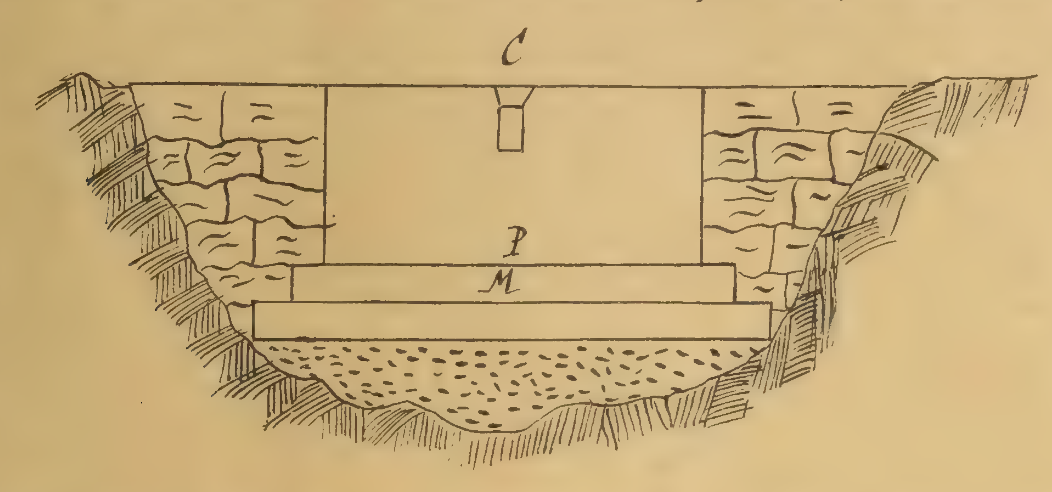
Il faut ajouter les déterminations de la gravité avec le pendule, elles complètent les opérations précédentes.

Mesure des bases géodésiques.

2. Choix de la base. Repères et alignements de la base.

On choisit un terrain uni, à peu près de niveau, dont le sol soit résistant et d'une étendue suffisante pour qu'on puisse y mesurer une ligne d'une dizaine de Kilomètres. Les deux extrémités doivent être visibles l'une de l'autre.

Il faut fixer les extrémités ou termes de la base par des repères inébranlables. Pour cela, on fait une fondation profonde jusqu'au sol résistant, on dépose une couche de béton, puis on construit un massif M en pierre de taille



servant de socle à un monolithe P dont la face supérieure affleure le sol. Au centre C, on creuse un trou cylindrique dans lequel on scelle un petit cylindre de platine, de manière qu'il soit légèrement en contre bas. Sur la base apparente du cylindre, on grave des circonférences concentriques, et deux diamètres rectangulaires dont un dirigé suivant la base. Le centre ainsi défini devient une des extrémités.

Quand la mesure est terminée, on dresse sur le monolithe une colonne ou une pyramide, en ayant soin de laisser un petit vide au dessus du cylindre repère qu'on recouvre d'une feuille de plomb.

Pour l'alignement de la base, au terme A, on installe un théodolite dont l'axe coïncide avec la verticale du repère et on vise un signal établi en B de manière que son axe se confonde avec la verticale du repère B. La lunette du théodolite, préalablement bien réglé, décrit alors le plan vertical passant par A et B; on jalonne la trace de ce plan sur le sol en enfonçant, de distance en distance à 500 mètres environ les uns des autres, de forts piquets sur lesquels on fixe des repères.

Avant de tracer l'alignement, on a dû préparer le terrain.

3. Suite des opérations à effectuer dans la mesure d'une base.

Quel que soit le système de règles employé, il faut au préalable:

1° Étalonner les règles, c'est-à-dire exprimer la longueur de ces règles en fonction d'une règle type. On se sert actuellement de règles portant des traits très fins placés près des extrémités de la surface supérieure. L'étalonnage se fait au moyen de microscopes, fixés sur des supports invariables, et dont on mesure la distance d'axe en axe, d'abord avec l'étalon, puis avec la règle géodésique. Ces déterminations se font au Bureau international des Poids et Mesures à Breteuil, près de Sèvres.

2° Mesurer les coëfficients de dilatation linéaire des métaux dont les règles sont composées, afin de pouvoir ensuite calculer les longueurs de ces règles aux températures observées.

Puis pour la mesure de la base, il faut

3° Porter les règles à la suite les unes des autres, en mesurant les intervalles qui les séparent et prenant note de la température,

4° Observer leur déviation par rapport à la ligne d'alignement,

5° Mesurer leur inclinaison,

6° Mesurer la longueur totale de la base et la réduire à la surface du niveau de la mer.

4. Appareils du Dépôt de la Guerre pour la mesure des bases.

Au lieu de mesurer, avec des languettes mobiles, les intervalles entre des règles posées successivement à la suite les unes des autres, ce que faisaient Borda et Bessel, on mesure, avec une seule règle, les intervalles compris entre les axes (préalablement rendus verticaux) de microscopes posés sur des supports fixes et disposés sur l'alignement de la base. Chaque portée est ainsi égale à la distance comprise entre les axes de deux microscopes consécutifs.

Ce procédé, susceptible d'une grande précision a été mis en œuvre vers 1850, par un ingénieur piémontais Porro.

Le premier appareil du Dépôt de la Guerre construit sur ce principe et qui a été utilisé pour la mesure des trois premières

bases d'Algérie, comporte une règle bi-métallique, cuivre et acier; les deux verges de 3^{m} environ sont rondes, placées côte à côte, et reliées vers leur milieu par un anneau, à partir duquel elles peuvent se dilater librement vers leurs extrémités. Elles sont entaillées vers les bouts, suivant une section plane pratiquée dans le sens de l'axe pour former des languettes de 5 centimètres de long, recouvertes d'une couche d'argent et divisées en deci-millimètres. Les zéros sont intérieurs, les centimètres et les millimètres sont numérotés.

Les verges sont enfermées dans une boîte de sapin possédant une contre-courbure telle que, reposant par ses extrêmités sur des supports, la règle soit horizontale. La boîte est pourvue, à ses extrêmités, de coulisses permettant de démasquer les languettes. Un niveau placé au centre supérieur de la boîte permet de déterminer l'inclinaison.



Si donc on suppose deux microscopes A et B dont on a figuré les axes optiques pointés sur la région des languettes de l'une des verges, la distance des deux axes des microscopes sera égale à la distance des zéros des languettes, augmentée de la somme des lectures des deux languettes, ces deux longueurs étant exprimées en tenant compte de la dilatation de la verge.

5. Dès 1854, l'appareil de Porro fut perfectionné par Brunner. Le Dépôt de la Guerre possède un appareil de ce genre consistant en une règle bi-métallique, platine et laiton de 4^{m} de longueur, avec des microscopes plus puissants permettant d'obtenir une plus grande précision. Il a servi à mesurer la base de Perpignan et à mesurer la nouvelle base de Paris.(1) Les deux règles reposent sur une forte poutre de fer. La règle de platine, qui est au dessus, présente près de chacune de ses extrêmités une ouverture ou fenêtre longitudinale de 6 centimètres environ de longueur, dans laquelle passe et peut glisser librement une réglette de platine qui est invariablement

(1) Ce même appareil vient d'être employé à la mesure des bases en Roumanie et en Turquie avec le concours d'officiers français.

fixée à la règle de laiton placée en dessous, et dont la surface supérieure affleure la surface de la règle de platine. L'un des bords de la fenêtre et le bord correspondant de la réglette portent chacun une division (en dixièmes de millimètres), en sorte que les traits correspondants de chacune de ces divisions peuvent être vus simultanément dans le champ d'un même microscope. Les deux règles étant fixées l'une à l'autre et à leur support par leur milieu, leurs dilatations inégales à partir de ce point, lorsque la température varie, font jouer l'une par rapport à l'autre, les deux divisions, et la mesure consiste, les microscopes étant pointés sur chacun des traits 0 et 4 mètres de la règle de platine, à déterminer à chaque extrêmité les numéros des deux traits de la règle de laiton qui les encadrent et à mesurer leurs intervalles au moyen du microscope. Cette opération suffit pour avoir les éléments servant au calcul de chaque portée.

L'étude de l'appareil, faite à l'établissement international des poids et mesures de Breteuil, a donné; μ désignant le micron ou millième de millimètre.

$$\text{règle platine temper.}-\theta: P_\theta = 4000329^\mu + 34^\mu,463\,\theta + 0^\mu 00676\,\theta^2$$

$$\text{règle laiton} \qquad L_\theta = 4000735 + 72,333\,\theta + 0,02628\,\theta^2;$$

On en déduit

$$P_\theta - L_\theta = 406^\mu + (37^\mu,870 + 0^\mu 01952\,\theta)\,\theta$$

Sur le terrain, l'observation donne $P_\theta - L_\theta$, on en déduit d'après la relation précédente la valeur de θ, ensuite avec θ on calcule P_θ c'est-à-dire la longueur de la portée.

Cet appareil, employé pour les bases de haute précision, ne permet pas de mesurer plus de 400 ou 500 mètres par jour.

Pour simplifier et aller plus vite, on a imaginé de substituer à la règle bi-métallique une règle mono-métallique dont la longueur est définie par deux traits 0 et 400 tracés aux extrêmités de la barre, 4 thermomètres sont échelonnés sur un des flancs de la règle, la boule noyée dans le métal, pour en donner la température; la mesure consiste à pointer les deux microscopes sur les traits: à l'arrière, le microscope reste fixe et l'observateur agit sur la règle; à l'avant, au contraire c'est le microscope qui est amené en coïncidence sur le trait.

La mesure est faite quand les deux microscopes pointent simultanément les deux traits. On lit en même temps les 4 thermomètres. Mais la température indiquée n'est pas nécessairement celle de la règle et un doute subsiste. On peut ainsi mesurer 800 mètres par jour.

Avec l'appareil du Professeur Suédois Jäderin on peut aller beaucoup plus vite et mesurer par jour au moins 3 Kilomètres, la précision étant largement suffisante pour l'établissement des cartes. L'appareil est formé de deux fils de 25 mètres de longueur (ou même de 50 à 100 mètres) de métaux différents, que l'on pose successivement à chaque portée sur les extrémités repérées de trépieds placés dans l'alignement de la base. Ces fils sont tendus à leurs bouts par des ressorts dynamométriques; la tension doit être toujours la même à chaque portée. À l'arrière, le zéro est amené en coïncidence avec le repère; à l'avant on lit l'appoint sur la réglette divisée en millimètres qui termine le fil. Les fils sont étalonnés à la tension même qui leur est donnée dans les mesures, et la différence de longueur des deux fils donne la température.

Cet appareil qui n'exige pas la préparation du sol pour la base permet de franchir de petits obstacles, même des rivières.

6. Corrections d'inclinaison et de déviation. Réduction au niveau de la mer. Les deux premières corrections ont pour effet de diminuer la longueur d'une portée L de

$$L - L\cos i = L(1-\cos i) = 2L\sin^2\frac{i}{2}$$

et de

$$L - L\cos\alpha = L(1-\cos\alpha) = 2L\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

i est l'inclinaison sur l'horizon et α la déviation par rapport à l'alignement.

La réduction de la base au niveau de la mer consiste à projeter les éléments de la base sur le géoïde ou simplement sur la sphère tangente à l'ellipsoïde le long du parallèle voisin de la base.

$L + \delta L$ étant la longueur réduite d'une portée L, N la grande normale, h l'altitude de la portée, déduite d'un nivellement préalable, on a

$$\frac{L+\delta L}{L} = \frac{N}{N+h}$$

$$\frac{\delta L}{L} = -\frac{h}{N+h} = -\frac{h}{N}\left(1-\frac{h}{N}+\cdots\right)$$

7_ Les erreurs principales de la mesure d'une base sont:
1° les erreurs provenant de l'étalonnage et de la détermination des cœfficients de dilatation; ce sont des erreurs <u>systématiques</u> qui sont multipliées par le nombre n des portées.

2° les erreurs <u>accidentelles</u>, telles que les erreurs de lecture etc .. commises dans le mesurage; l'erreur résultante est égale comme on le montrera dans la théorie des erreurs, à l'erreur pour une portée multipliée par $\sqrt{n}$.

La vérification d'une mesure de la base s'obtient en recommençant cette mesure ou celle d'un segment.

A la fin de la mesure d'un grand réseau, on fait aboutir la triangulation à une nouvelle base qui sert de contrôle; sa longueur calculée doit se trouver égale à la longueur mesurée directement.

En France, on est partisan des grandes bases, de 7 à 12 Kilomètres de longueur. A l'étranger, les bases sont plus courtes, de 2 à 3 Kilomètres.

8_ Mesure d'une nouvelle base de la triangulation française.
Cette base a été choisie sur l'emplacement de l'ancienne base de Picard, entre Villejuif et Juvisy. La mesure a été exécutée pendant les mois de Juin, Juillet et Août 1890 sous la direction du Colonel Bassot et du Commandant Defforges par 8 officiers de la section de Géodésie, assistés d'un personnel auxiliaire s'élevant à 57 hommes, sous-officiers, secrétaires et soldats.

La base a été mesurée deux fois

	1re Mesure	2ième Mesure	Différence
Longueur de la base	7226m,8878	7226m,8967	−8mm,9
Nombre de jours	25	18	

La réduction au niveau de la mer a été de −99mm,8.

Triangulations de divers ordres.
Signaux géodésiques.

9\. On commence par déterminer avec la plus grande exactitude des chaînes de triangles, le long de méridiens et de parallèles. Sur la méridienne de Paris viennent se greffer directement les parallèles de Paris, de Bourges, de Clermont, de Rodez, d'Amiens et des Pyrénées, et d'une manière indirecte les méridiennes latérales de Bayeux, de Sedan et de Strasbourg, qui divisent la France en rectangles de 200 Kilomètres environ de côté. Ces chaînes ont fourni les éléments de départ et de vérification d'un réseau continu formé de grands triangles de 30 Kilomètres environ de côté, dans l'intérieur desquels des triangulations dites de 2ième et de 3ième ordre, avec des côtés de longueurs moyennes respectives de 15 et de 8 Kilomètres, permettent de déterminer tous les points topographiques remarquables du sol de la France.

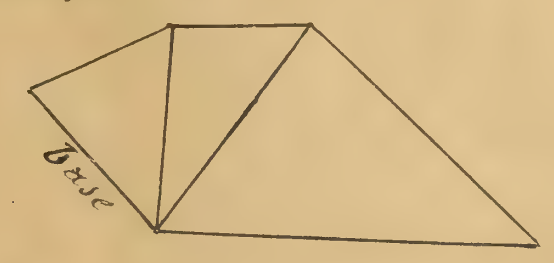
Une reconnaissance préalable du terrain conduit au choix des points qu'on prendra comme sommets des triangles. Cette reconnaissance, facile dans une région accidentée, est au contraire assez difficile en France et surtout dans une région plate et boisée, comme les Landes. On est alors obligé d'élever à une hauteur suffisante les stations d'observation pour assurer la visibilité réciproque et pour éviter les rayons rasant le sol.

Le service géographique se sert actuellement pour les reconnaissances et pour vérifier les visibilités réciproques, d'échelles en fer analogues à celles des pompiers, qui permettent de s'élever à 20 mètres au dessus du sol.

10\. Forme des triangles. La forme préférable est celle du triangle équilatéral. On justifiera plus loin ce choix en s'appuyant sur la théorie des erreurs.

L'emploi des triangles équilatéraux présente en outre l'avantage de couvrir le sol avec le nombre minimum de triangles.

Les bases mesurées étant toujours plus petites que les côtés d'un réseau, on passe de cette base à la chaîne par une série de triangles qui doivent aller en croissant; la forme préférable est celle du triangle rectangle-isocèle.



L'avantage des grandes bases est de simplifier le rattachement au premier côté, et d'éviter les erreurs à craindre dans l'amplification de la base. L'idéal serait de mesurer directement le premier côté.

11. Signaux solaires et signaux de nuit.

C'est Gauss qui a introduit dans la pratique de la Géodésie l'usage des signaux solaires.

Un petit miroir placé à la station A est manœuvré de manière à réfléchir la lumière du soleil et à la renvoyer vers l'autre station B. L'observateur dans cette station verra dans la lunette un point lumineux comparable à l'image d'une étoile.

En effet, pour que l'image perçue par l'observateur fut celle du soleil tout entier, il faudrait que le miroir eut une dimension telle que, vu de la station, il sous-tendit un angle de 32' comme le soleil lui-même.

Soit d cette dimension et 40000 mètres la distance AB, on devra avoir

$$3438' \frac{d}{40000} = 32' \text{ d'où } d = 400 \text{ mètres environ}$$

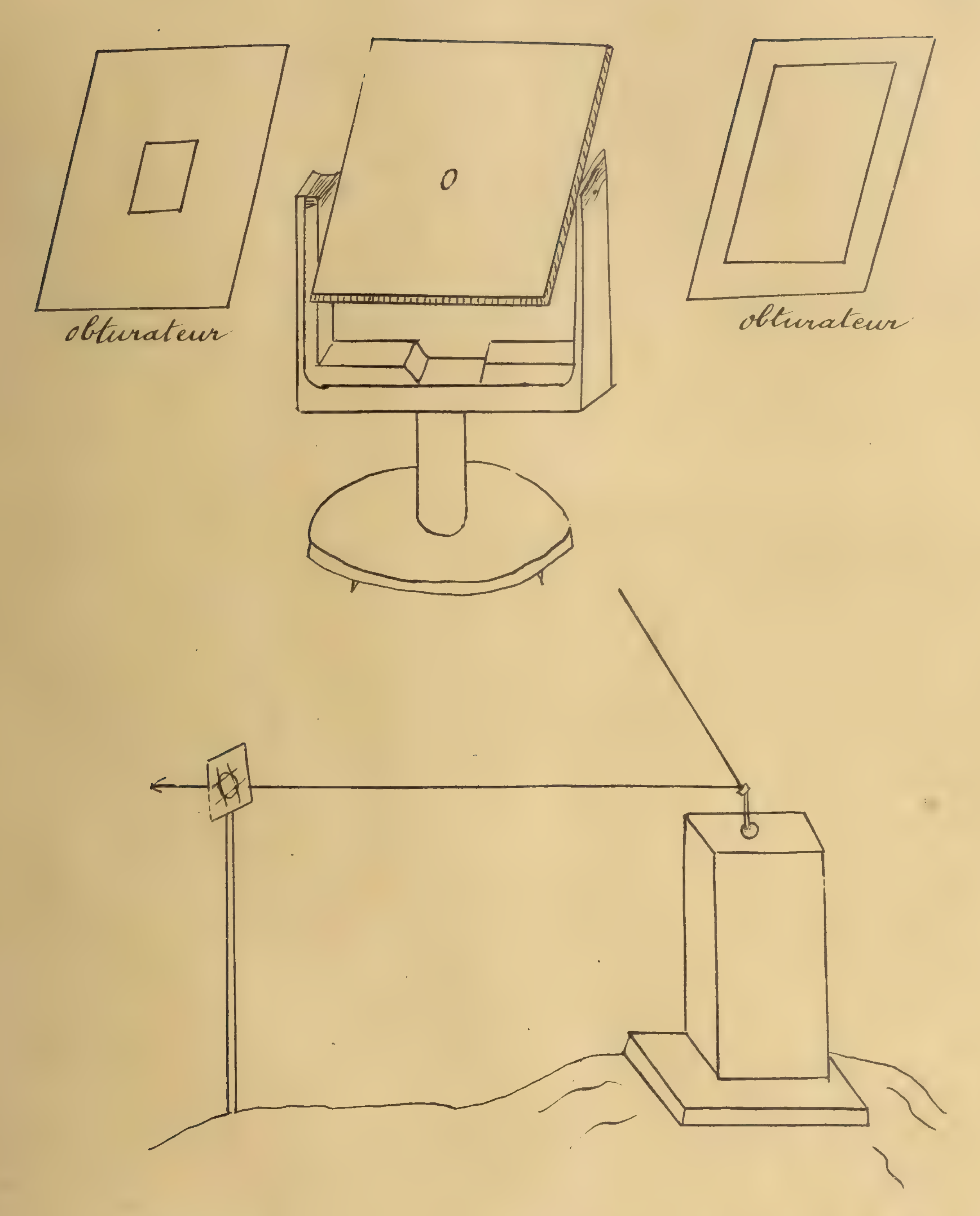
Comme on ne donne pas même $0^m,1$ de côté à ce miroir, l'image qu'il enverra à l'observateur aura au plus

$$32' \times \frac{0.1}{400} = \frac{1920''}{4000} = 0''4 ;$$

l'image sera comparable à celle d'une étoile brillante.

L'appareil employé au Dépôt de la Guerre se compose d'un miroir argenté, ajusté dans un cadre métallique porté par un axe horizontal ; cet axe est monté sur une large fourchette mobile autour de l'axe d'une colonne établie sur un socle, pourvu de trois vis de support.

Par construction, le point d'intersection des deux axes de rotation coïncide avec le centre de la surface réfléchissante du miroir, et l'axe vertical prolongé rencontre le plan de support au centre du cercle déterminé par les pointes des trois vis.



Au centre du miroir se trouve ménagé un petit cercle non argenté de 2 millimètres qui forme œilleton et permet de viser à travers la glace.

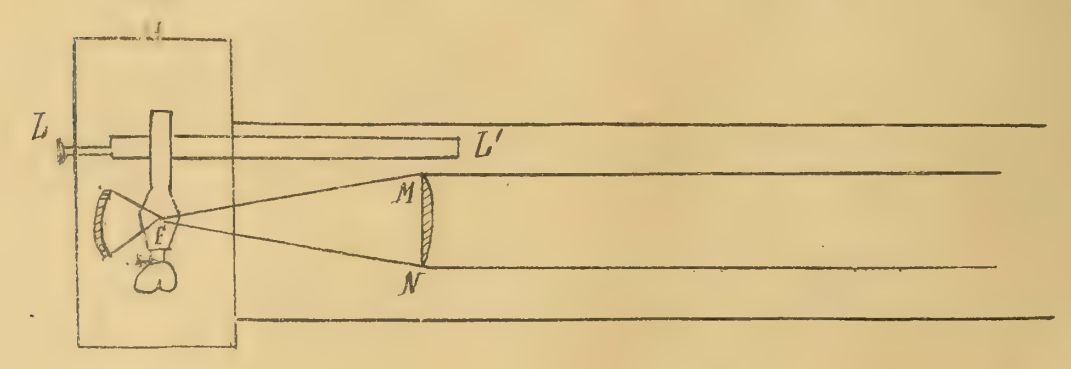
Des obturateurs de diverses dimensions permettent de réduire la surface du miroir

En chaque point géodésique A, l'appareil est installé au centre même de la station sur le pilier d'observation, l'opérateur tenant la glace verticalement, la tourne du côté du point B à éclairer, et vise ce point en mettant son œil derrière l'œilleton ; un aide se porte à quelques mètres en avant avec une planchette percée d'un trou circulaire, derrière lequel sont fixés 4 fils de cuivre se croisant deux à deux, et amène la planchette dans une position telle que le centre du carré des fils se trouve sur la direction du point visé.

Il suffit ensuite de maintenir l'image lumineuse au centre du trou de la planchette, ce qui est facile par la manœuvre du miroir.

On emploie en Allemagne un héliostat, dit de Bertram, qui est très pratique et donne de très bons résultats

12. Signaux de nuit. Au dépôt de la Guerre on fait usage d'appareils désignés sous le nom de collimateurs optiques, semblables à ceux qu'a fait construire le Colonel Mangin pour le service de la télégraphie optique.



La construction de ces collimateurs repose sur le principe suivant. Soit MN une lentille dont le foyer principal est en F ; un point lumineux situé à une très grande distance, envoie sur cette lentille des rayons qu'on peut considérer comme parallèles et qui viennent se rencontrer au foyer principal F. Inversement, si un point lumineux est placé en F, il envoie un faisceau lumineux qui, après avoir traversé la lentille MN, sort de MN sous la forme d'un faisceau cylindrique parallèle à l'axe.

Dans les collimateurs optiques la source lumineuse est une lampe à pétrole. A l'arrière de la source lumineuse est disposé un petit miroir qui renvoie les rayons lumineux vers la lentille.
L'appareil est complété par un trépied muni de vis calantes; on peut l'orienter et le fixer dans une direction déterminée. Une lunette LL' appelée lunette de réception qu'on peut régler au moyen de vis, de manière à rendre son axe optique parallèle à l'axe du collimateur, sert à orienter l'appareil.

A l'œil nu, à une distance de 40 Kilomètres et plus les signaux ont l'apparence d'une grosse étoile. Dans des circonstances favorables, ils ont été vus à l'œil nu à la distance de 105 Kilomètres.

Dans certaines circonstances particulières, quand il s'agit par exemple de relier des îles aux continents ou des continents entre eux (Jonction de l'Espagne et de l'Afrique) on a recours comme source lumineuse à une lampe électrique. Pour le service de la télégraphie il suffit d'interrompre la lumière suivant des conventions adoptées.

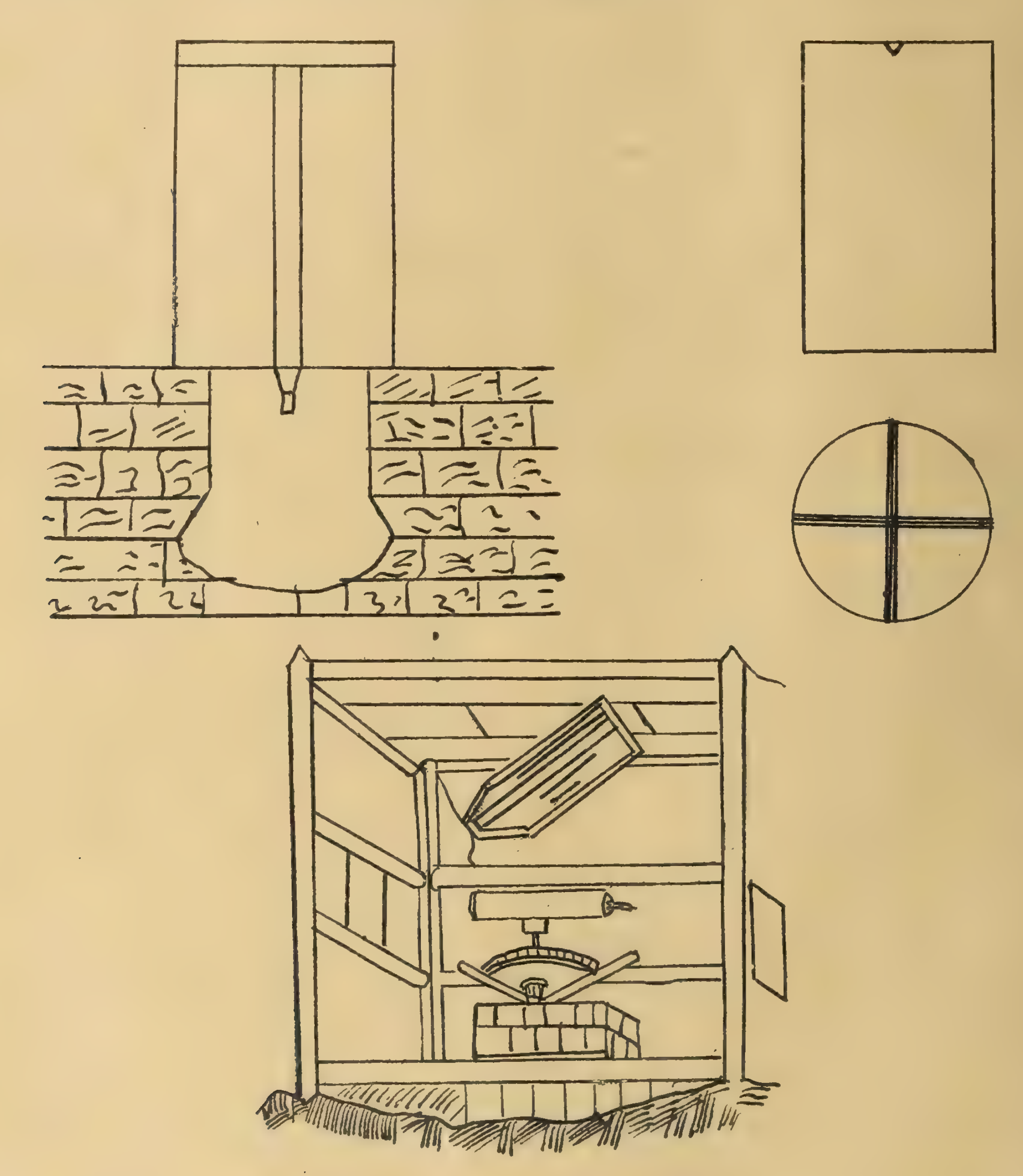
13. Station géodésique normale. On désigne ainsi toute station où le rocher affleure, où le sol est résistant et d'où l'on découvre tous les points à viser, sans être obligé de s'élever au dessus des objets environnants. A toute station normale, on procède ainsi.

Le centre de la station est repéré au moyen d'un cylindre en bronze ou en cuivre qu'on scelle dans une borne, et la borne elle-même est noyée dans une fondation maçonnée de manière à ne pas dépasser le sol. Le cylindre porte sur sa face supérieure deux traits rectangulaires dont l'intersection est le centre de la station.

Au dessus des fondations, on élève un pilier de 1m,15 au dessus de son socle et de 0m,60 de côté, et l'on détermine avec la plus grande précision le point où la verticale du repère coupe la surface supérieure du pilier. Autour de ce point comme centre, on décrit une circonférence sur laquelle

viendront plus tard se poser les trois pointes du miroir héliotrope et une autre circonférence sur laquelle se poseront les vis calantes du cercle azimutal et celles des collimateurs optiques

De la sorte, on évite toute erreur de centre et toute réduction au centre de la station.



Pendant la période des observations, on fait dresser au dessus du pilier une cabane en bois et toile pour préserver l'observateur et l'instrument des rayons du soleil.

Les divisions du cercle azimutal sont éclairées pendant le jour par la lumière zénithale traversant une large glace dépolie, à la partie centrale du toit. Pendant la nuit, la glace est enlevée et remplacée par un chassis portant une lampe surmontée d'un large réflecteur qui renvoie en bas la lumière diffuse.

Dans les pays plats et boisés, l'installation décrite ne suffit pas. Il est nécessaire alors de faire construire des signaux élevés pour assurer la visibilité d'une station à l'autre. Les deux charpentes indépendantes dont se compose un signal servent alors à supporter l'une l'observateur et la baraque abri; l'autre, le cercle azimutal, le miroir héliotrope ou le collimateur optique.

Mesure des angles horizontaux et des distances zénithales.

14. Cercle azimutal réitérateur du Dépôt de la Guerre. (Planche 9 du Portefeuille) Cet instrument uniquement disposé pour la mesure des angles horizontaux, se compose d'un limbe gradué et d'une alidade montés autour d'un axe commun qui fait corps avec le pied de l'instrument.

Le cercle divisé est porté par des rayons issus d'un plateau central annulaire faisant douille autour de l'axe; il peut tourner à frottement doux autour de l'axe ou lui être assujetti d'une façon invariable par des vis butantes.

Le mouvement doux du limbe permet d'amener une origine déterminée sous l'index et par conséquent de déplacer à volonté l'origine des lectures. L'alidade, qui emboîte l'axe comme un manchon, entraîne la lunette, l'index, les 4 microscopes, la pince de serrage, dont la mâchoire agit sur un anneau fixe horizontal entourant le limbe divisé et le protégeant.

Suivant l'usage adopté au Dépôt de la Guerre, la division habituelle en degrés, dite sexagésimale, est remplacée pour tous les instruments par la division en 400 grades, plus conforme au système décimal; les subdivisions du grade sont de dix en dix fois plus petites.

15. Méthode de la réitération – C'est la méthode adoptée au Dépôt de la Guerre et qui a remplacé la méthode de la répétition (Chapitre II, n° 21).

Le cercle azimutal a 4 microscopes; leur intervalle est donc de 90° ou plutôt de 100 grades. Soit à mesurer l'angle des deux objets AB.

On pointera la lunette sur l'objet correspondant à la plus petite division du limbe soit A; la lunette restant pointée, on desserre les vis qui fixent le limbe et on le fait tourner de manière à amener sous l'index le 0° du limbe, on serre les vis du limbe, et on procède à la mesure de l'angle en pointant la lunette sur A, puis sur B, et lisant à chaque fois les 4 microscopes.

Pour la seconde mesure on amène sous l'index la division $\frac{100^\circ}{n}$, si n est le nombre des réitérations voulues. Cette division sera de 5^G si l'on veut faire 20 réitérations. Ce sera l'origine pour la deuxième mesure.

Pour la troisième mesure, on amène sous l'index la division 10^G et ainsi de suite.

Pour faire la vingtième mesure, on amènera sous l'index le trait 95^G du limbe, la lunette étant pointée sur A

C'est comme si l'on avait mesuré une fois l'angle avec un instrument muni de $4 \times 20 = 80$ Verniers. Tous les termes de la série de Fourier représentant les erreurs de division . . . (Chapitre III, n° 5) seront donc éliminés jusqu'au quatre vingtième.

En outre, les erreurs accidentelles de pointé et de lecture se trouveront divisées par la racine carrée du nombre des mesures soit $\sqrt{20}$, quand on prend la moyenne des 20 mesures. Ce point sera établi dans la théorie des erreurs.

16. Série des opérations à exécuter pour mesurer un angle – En chaque sommet géodésique; on a toujours plusieurs angles à mesurer. Au lieu de les mesurer isolément et d'une manière indépendante, on procède par tours d'horizon en partant d'une des directions du réseau.

On vise d'abord cette direction initiale, puis successivement toutes les autres directions et on termine par un pointé nouveau sur la direction initiale, pour s'assurer que le limbe n'a pas subi d'entraînement.

Ensuite, on retourne la lunette en échangeant les tourillons de place et on recommence la série en déplaçant l'alidade en sens inverse.

L'ensemble de ces deux groupes d'observations constitue une série complète, correspondant à une origine donnée du limbe.

La première série terminée, et la lunette restant pointée sur l'objet initial, on desserre alors les vis qui fixent le limbe et on le fait tourner de manière à amener sous l'index la deuxième origine; on serre ensuite les vis du limbe et on procède aux observations de la deuxième série.

17. Théodolite réitérateur. Le théodolite employé au Dépôt de la Guerre pour la mesure des distances zénithales et pour les opérations de triangulation du deuxième ordre est disposé pour la méthode de la réitération. On procède par retournement en mesurant les doubles distances zénithales (Chapitre I, n° 9)

Le retour au point initial pour s'assurer que le limbe n'a pas subi d'entraînement dont il a été parlé (N° 16) se fait toujours avec le théodolite.

L'expérience a montré qu'un effet de ce genre était insensible avec le cercle azimutal.

18. Note sur l'emploi de la méthode des observations géodésiques par mesure directe des angles.[1] (Non exigé)

L'habitude actuelle dans les opérations géodésiques exécutées par le service Géographique en France et en Algérie, est d'opérer en chaque station par tour d'horizon, toutes les directions étant rapportées à une direction initiale, ou direction de référence.

Cette méthode suppose que l'on puisse faire toujours un tour d'horizon complet, à chaque origine, ce qui est généralement vrai en Algérie où le temps est très clair, et les jours embrumés très rares, et en France dans les observations de nuit.

Dans les observations de jour sur héliostats, en Europe, il arrive fréquemment qu'une partie de l'horizon est invi-

---

(1) Note communiquée par M. le Chef. d'Escadron Bourgeois, chef de la section de Géodésie au service géographique de l'Armée.

sible pour des raisons météorologiques quelconques. Afin de ne pas perdre un temps trop considérable aux observations, on a modifié, en Allemagne, la méthode des tours d'horizon avec direction de référence, et l'on opère en mesurant directement les angles que font les directions entre elles.

Soient A et B, deux signaux, C la station, ABC l'angle à mesurer; une mesure complète de cet angle à une origine donnée, ou ce que les géodésiens allemands appellent un « Satz », comprend les opérations suivantes:

1° Visée sur A; 2° Visée sur B; 3° Visée sur B; 4° Visée sur A.

Si $2p$ est le nombre de fois que chaque angle doit être mesuré, cette mesure est faite à p origines différentes, distantes entre elles de $\frac{200^G}{p}$ ou de $\frac{100^G}{p}$ suivant que l'on opère avec un cercle à 2 ou à 4 microscopes. Le nombre des directions étant n, le nombre des angles qu'elles forment entre elles est $\frac{1}{2}\, n(n-1)$. La répartition des origines se fait de telle sorte qu'aucune direction ne soit visée plus d'une fois à chaque origine, et que le nombre de ces dernières soit le plus petit possible. Ce nombre minimum des origines s'obtient en divisant l'intervalle $\frac{200^G}{p}$ en n ou $n-1$ parties, suivant que n est impair ou pair.

Dans le cas de cinq directions, par exemple, les mesures d'angles se feraient conformément aux tableaux suivants:

1° Angles mesurés:

1.2	2.3	3.4	4.5
1.3	2.4	3.5	
1.4	2.5		
1.5			

2° Répartition des origines: (chaque angle étant supposé mesuré 10 fois avec un instrument à 2 microscopes diamétralement opposés, par conséquent à des origines réparties entre 0 et 200^G;)

Angles	— Origines —				
1.2	0	40	80	120	160
1.3	8	48	88	128	168
1.4	16	56	96	136	176
1.5	24	64	104	144	184
2.3	16	56	96	136	176
2.4	24	64	104	144	184
2.5	32	72	112	152	192
3.4	32	72	112	152	192
3.5	0	40	80	120	160
4.5	8	48	88	128	168

L'avantage principal de cette méthode c'est qu'on n'est pas obligé d'attendre que tous les signaux soient visibles à la fois pour faire un tour d'horizon irréprochable; il suffit de voir deux signaux pour pouvoir effectuer une ou plusieurs des mesures d'angles du tableau ci-contre. On gagne ainsi un temps considérable, dans les pays où l'atmosphère est souvent brumeuse et l'on s'affranchit des tours d'horizon incomplets qui sont irrationnels.

Observations astronomiques aux sommets de la colatitude, de la longitude et de l'azimut d'une direction.

19. Ces observations, qui doivent être répétées pour plusieurs des sommets, s'effectuent à l'aide d'un cercle méridien portatif (Planche 9 du Portefeuille).
Les principes des méthodes à suivre ont été indiqués.

La colatitude est déterminée par la mesure des distances zénithales méridiennes d'étoiles connues, d'après la relation

$$\delta - \lambda = z_m$$

On observe alternativement des étoiles et le nadir; on a soin de prendre des étoiles avec des distances zénithales

moindres que 30° (pour éviter les incertitudes de la refraction) du côté du Sud et du côté du Nord.

La longitude doit être déterminée par la méthode télégraphique (Chapitre V, N° 9).

L'azimut d'une direction issue du sommet considéré s'obtient de préférence au moyen d'un signal auxiliaire (miroir solaire ou collimateur optique) placé à 20 ou 30 Kilomètres de distance dans la direction approchée du méridien et jouant le rôle de mire méridienne

Cette détermination se fait en mesurant astronomiquement l'angle que fait avec la direction du méridien, la direction allant du centre d'une station à une mire nord ou sud, placée dans le voisinage immédiat du méridien. On substitue ensuite au cercle astronomique un cercle azimutal géodésique, centre pour centre, et l'on mesure géodésiquement l'angle MAB, d'où l'on conclut l'azimut, qui se compte du Sud en allant vers l'Ouest.

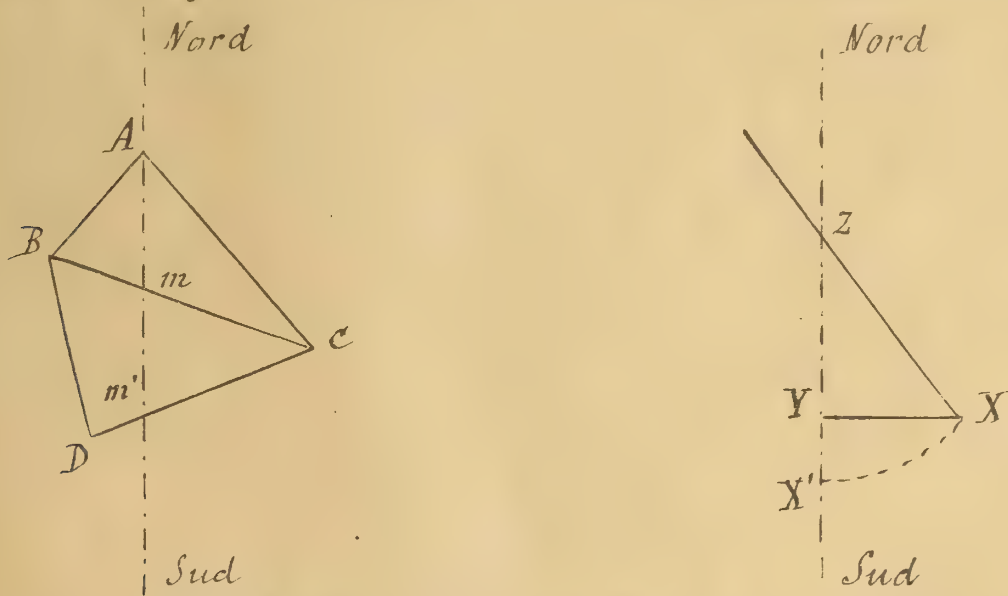


Les observations astronomiques font connaître l'azimut de l'axe optique de la lunette supposé horizontal. La vis micrométrique du cercle méridien permet de mesurer la différence d'azimut de l'axe optique et de la direction du signal.

Chapitre XVI.

Calcul des Arcs de méridiens. Eléments de l'ellipsoïde terrestre. Système métrique. Arcs de parallèles. Calcul des coordonnées des sommets de la triangulation.

1. Mesure d'un arc de méridien _ Considérons une chaîne de triangles, dans la direction du méridien issu de A.



On a mesuré en A la colatitude, la longitude et l'azimut du côté AB par exemple, c'est-à-dire l'angle BAm que la direction AB fait avec le méridien. Le côté AB est censé rattaché à la base et connu.

On a mesuré aussi tous les angles en chaque sommet.

Cela posé, le théorème de Legendre permet de faire le calcul des triangles sphériques situés sur les sphères tangentes à l'ellipsoïde; il suffit de remplacer le rayon R de la sphère dont il est question dans la démonstration du théorème de Legendre par la grande normale N.

On calcule d'abord les côtés des triangles; on utilise alors la première formule de l'excès sphérique; on n'a pas besoin ici de N.

On calcule ensuite les segments de la méridienne: Am, mm', ...

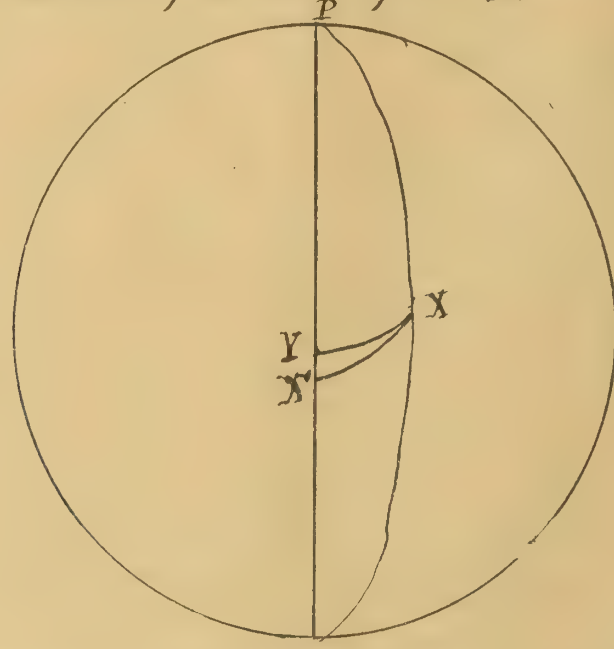
Am est un des côtés du triangle AmB, dans lequel on connait le côté AB et les deux angles adjacents mAB, ABm; on utilise alors la seconde formule de l'excès sphérique,

$$\varepsilon = 206265'' \frac{T}{N^2},$$

N tenant la place de R; N varie très peu, et ses variations, à cause de la petitesse de ε, n'ont guère d'influence.

Le segment mm' sera donné par le triangle mCm', dans lequel on connait le côté Cm, différence de BC et de Bm, et les deux angles mCm' et Cmm'; le calcul est le même que tout à l'heure.

A l'extrêmité de la chaine de triangles, on ne peut pas déterminer les coordonnées en un point même de la méridienne; la colatitude et la longitude du dernier sommet X se rapportent à un point en dehors de la méridienne. De X, sur la sphère tangente, on abaisse un arc de grand cercle perpendiculaire à la méridienne. On peut calculer la distance YX' de Y au parallèle passant par X.



En effet, considérons la sphère tangente à l'ellipsoïde terrestre le long du parallèle XX'; la distance YX' est la différence entre l'hypothénuse PX et le côté de l'angle droit PY du triangle rectangle PYX (PX est la méridienne du sommet X); on a

Angle en P = différence des longitudes $L' - L$ de X et de A

$$PX = \lambda'$$

Par la règle mnémonique des triangles sphériques rectangles (Chapitre I, n° 26)

$$\cos P = \frac{tg\,PY}{tg\,PX},$$

$$tg\,PY = \cos P\, tg\,\lambda' = \frac{1 - tg^2 \frac{P}{2}}{1 + tg^2 \frac{P}{2}}\, tg\,\lambda'$$

et, d'après le développement en série dû à Lagrange (chapitre I, n° 29),

$$PY = \lambda' - tg^2 \frac{P}{2} \sin 2\lambda' + \dots$$

$$YX' = \lambda' - PY = tg^2 \frac{P}{2} \sin 2\lambda'.$$

X' sera l'extrémité de l'arc méridien ; on en connait la colatitude λ'.

2_ Formation des équations de condition pour déterminer les éléments de l'ellipsoïde terrestre_ L'expression de la longueur d'un arc de l'ellipse méridienne compris entre les colatitudes λ et λ' est

$$s = a(1-e^2)\left[M(\lambda' - \lambda) + \frac{1}{2} N(\sin 2\lambda' - \sin 2\lambda) + \frac{1}{4} P(\sin 4\lambda' - \sin 4\lambda) + ..\right]$$

c'est-à-dire de la forme

$$s = a f(e^2)$$

Pour chaque arc mesuré, on a une équation de condition ; on les ramène à la forme linéaire en posant

$$a = a' + da, \qquad e^2 = e'^2 + de^2,$$

a' et e'^2 étant des valeurs approchées de a et e^2 données par les mesures antérieures. En chiffres ronds, on peut prendre $a' = 6400$ Kilomètres. aplatissement $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{300}$.

En développant par la formule de Taylor, et négligeant les carrés et produits de da et de de^2, on aura

$$s = a' f(e'^2) + a' \frac{df(e'^2)}{de'^2} de^2 + f(e'^2)\, da.$$

En portant dans cette équation les données numériques relatives à chaque arc, on forme les équations de condition, et on les traite par la méthode des moindres carrés.
Les trois arcs les les plus importants sont

l'arc Russo-suédois, pour lequel $\lambda' - \lambda = 23°$ et $\frac{\lambda+\lambda'}{2} = 32°$

Anglo-Français ———— 22 40

Anglais dans l'Inde 24 . . . — 70

On renvoie à l'ouvrage de Mr Faye pour les détails des calculs. On trouve comme résultats

$$a = 6378393 \text{ mètres} \pm 79 \text{ mètres} \quad \mu = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{291,9 \pm 1.1}$$

3. Etablissement du système métrique. L'assemblée Constituante avait décrété, le 8 Mai 1790, sur la proposition de Talleyrand, qu'il y avait lieu pour faire cesser la diversité des poids et mesures, de fixer une unité fondamentale de longueur, à la fois nationale et universelle, d'où devaient dériver, d'une manière simple, les unités de surface, de volume, de poids et de monnaie. Une Commission composée de Borda, Laplace, Lagrange, Monge et Condorcet conclut à l'adoption d'une unité de longueur prise sur la terre même et égale à la dix millionième partie du quart du méridien; elle proposa de déduire cette unité d'une nouvelle détermination des éléments de l'ellipsoïde terrestre obtenue par la combinaison de l'arc du Pérou avec l'arc français, qui serait remesuré et prolongé jusqu'à Barcelone, s'étendant ainsi sur une amplitude de $9°\frac{1}{2}$ environ. Ces propositions furent votées le 26 Mars 1791 et l'Académie des sciences fut chargée de s'occuper des opérations multiples que devait entrainer leur adoption.
Borda fut chargé de créer des instruments nouveaux. Des méthodes nouvelles furent imaginées par Legendre et Delambre pour les observations et les calculs. Les opérations sur le terrain furent commencées en 1792, au Nord par Delambre, au Sud par Méchain.
Pour calculer la longueur du quart du méridien, il faut faire dans l'expression de la longueur de l'arc d'ellipse compris entre les colatitudes λ et λ'.

$$s = a(1-c^2)\left[M(\lambda'-\lambda) + \frac{1}{2}N(\sin 2\lambda' - \sin 2\lambda) + \frac{1}{4}P(\sin 4\lambda' - \sin 4\lambda) \ldots\right]$$

$\lambda' = \frac{\pi}{2}$ et $\lambda = 0$.

d'où pour la longueur Q du quart du méridien

$$Q = a(1-c^2)M\frac{\pi}{2}.$$

En divisant l'expression de la longueurs d'un des arcs, par exemple l'arc de France par Q, il vient

$$\frac{\pi}{2}\frac{s}{Q} = \lambda' - \lambda + \frac{1}{2}\frac{N}{M}(\sin 2\lambda' - \sin 2\lambda) + \frac{1}{4}\frac{P}{M}(\sin 4\lambda' - \sin 4\lambda) + \ldots$$

ou, λ et λ' étant évalués en angle et non en parties du rayon,

$$\frac{\pi}{2}\frac{s}{Q} = \frac{\lambda'-\lambda}{206265''} + \frac{1}{2}\frac{N}{M}(\sin 2\lambda' - \sin 2\lambda) + \frac{1}{4}\frac{P}{M}(\sin 4\lambda' - \sin 4\lambda) + ;$$

On peut donc calculer Q au moyen de l'arc s mesuré, le second membre ne dépendant que de c^2 ou de μ.

La Commission des poids et mesures ayant arrêté son travail avant les dernières opérations de Delambre prit $\frac{1}{334}$ pour l'aplatissement terrestre.

On avait pris pour μ une valeur trop petite; mais l'erreur qui en résulte pour le rapport $\frac{s}{Q}$ est faible; elle eût été presque nulle si le milieu de l'arc français eût répondu à la colatitude de 45°. En effet, le terme

$$\frac{1}{2}\frac{N}{M}(\sin 2\lambda' - \sin 2\lambda) = \frac{N}{M}\sin(\lambda'-\lambda)\cos(\lambda+\lambda')$$

aurait été nul, à cause de

$$\frac{\lambda+\lambda'}{2} = 45°;$$

$\frac{s}{Q}$ ne dépend plus que des termes en c^4.

Il eût suffi que l'arc fut prolongé jusqu'à l'île de Formentera ($\lambda = 51°20'$)

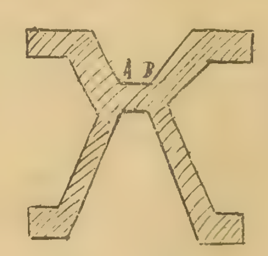
Cette prolongation fut exécutée par Biot et Arago mais plusieurs années après l'établissement du mètre.

Les résultats des observations de Méchain et Delambre, discutés par une Commission composée de savants de toutes les nations, furent présentés à l'adoption du Corps législatif le 22 Juin 1799 ainsi que les étalons de mesures de longueur et de poids qui en résultaient. Une loi du 10 Décembre 1799 rendit leur adoption définitive.

En fait, le mètre établi par cette loi ne répond pas tout à fait à sa définition théorique; il est trop petit de 0mm,19; mais le résultat essentiel, l'uniformité des mesures a été réalisé.

Dans le principe, le système métrique ne fut adopté que par un petit nombre de nations, mais la question de l'unification des poids et mesures a fait un grand pas dans ces dernières années. Une Commission internationale s'est réunie, à Paris, en 1870, et les années suivantes. Elle a décidé de prendre pour point de départ de ses travaux le mètre légal, de le copier le plus exactement possible et de donner une copie préalablement étalonnée à chacune des nations intéressées.

Le métal des nouveaux mètres est en platine fondu avec 10% d'iridium pour donner au métal une grande dureté.



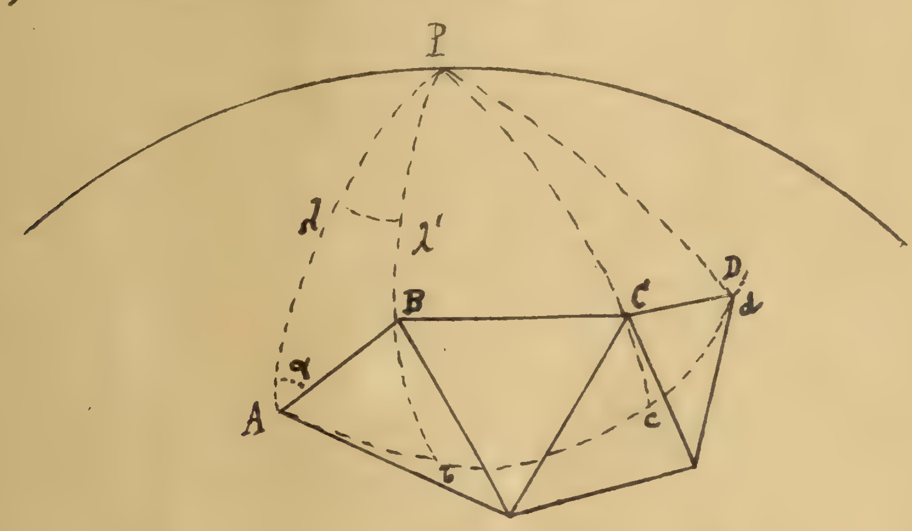
La section de la règle a la forme indiquée pour présenter la plus grande résistance possible à la torsion. Sur la petite face A.B sont tracés deux traits très fins distants de 1 mètre; c'est donc une règle à traits.

Une convention dite Convention du mètre a été signée par les États intéressés à la date du 20 Mai 1875.

Enfin, un Bureau international des poids et mesures a été créé et installé dans le pavillon de Breteuil, près de Sèvres; tous les appareils pour la mesure des cœfficients de dilatation et les étalonnages y sont installés; les mètres et les Kilogrammes destinés à chaque état sont comparés aux prototypes français; les règles géodésiques peuvent aussi y être étalonnées.

(Voir pour plus de détails l'ouvrage que vient de publier Mr. Bigourdan: Le système métrique des poids et mesures.)

4 - Mesure d'un arc de parallèle - Au lieu de mesurer géodésiquement un arc de méridien, on peut mesurer un arc de parallèle, cela est utile pour s'assurer de la forme de révolution de l'ellipsoïde ; la marche est la même. On rattache l'arc Abcd... à une chaîne de triangles dont on mesure les angles. On calcule les côtés en partant d'une base mesurée et projetant tous les triangles sur la sphère tangente le long du parallèle ; on détermine les coordonnées colatitude, longitude et azimut d'un des côtés, au sommet de départ A ainsi qu'au sommet extrême D.



Il s'agit de calculer les segments Ab, bc, cd du parallèle.
Les longitudes des points appartenant à l'ellipsoïde et à la sphère tangente sont égales ; mais les colatitudes ailleurs qu'en A ne peuvent être supposées égales ; quant aux azimuts, leur différence est très petite relativement à la différence des colatitudes ; on les prendra égaux sur l'ellipsoïde et sur la sphère.
Le triangle sphérique PAB, considéré comme tracé sur la sphère tangente donne, en désignant par λ, λ' les colatitudes de AB, par P l'angle au pôle, par α l'angle PAB, par K la longueur AB.

$$\frac{\sin P}{\sin \frac{K}{N}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \lambda'} ;$$

λ' est donné par la relation

$$\cos \lambda' = \cos \lambda \cos \frac{K}{N} + \sin \lambda \sin \frac{K}{N} \cos \alpha .$$

On a à calculer

$$Ab = PN \sin \lambda.$$

N étant la grande normale pour la colatitude λ. Or d'après le développement en série

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots,$$

qui donne

$$x = \sin x + \frac{\sin^3 x}{6} + \dots,$$

$$Ab = N \sin \lambda \left(\sin P + \frac{\sin^3 P}{6} + \dots \right)$$

$$= N \sin \lambda \left(\sin \frac{K}{N} \frac{\sin \alpha}{\sin \lambda'} + \frac{1}{6} \sin^3 \frac{K}{N} \frac{\sin^3 \alpha}{\sin^3 \lambda'} + \dots \right)$$

$$= N \sin \lambda \left[\frac{K}{N} - \frac{1}{6} \left(\frac{K}{N} \right)^3 \right] \frac{\sin \alpha}{\sin \lambda'} + \frac{1}{6} \left(\frac{K}{N} \right)^3 \frac{\sin^3 \alpha}{\sin^3 \lambda'} N \sin \lambda$$

$$= K \frac{\sin \alpha}{\sin \lambda'} \sin \lambda - \frac{1}{6} N \sin \lambda \frac{\sin \alpha}{\sin \lambda'} \left(\frac{K}{N} \right)^3 \left(\frac{\sin^2 \lambda' - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \lambda'} \right)$$

Les deux termes dépendent de N; le second est très petit à cause du facteur $\left(\frac{K}{N}\right)^3$; une valeur approchée de N suffit pour calculer les deux termes.

On calcule par un procédé analogue bc; l'angle PBC du triangle PBC résulte des mesures et des calculs déjà faits; l'angle ABC est connu par les mesures; l'angle ABP du triangle PAB est calculé; on connait aussi la colatitude du point B.

On aura ainsi la longueur de l'arc de parallèle Ad compris entre les méridiens des sommets A et D.

Mais L et L' désignant les longitudes de ces deux sommets déterminées par la méthode télégraphique, et évaluée en angle.

$$\frac{\text{arc } Ad}{2\pi N \sin \lambda} = \frac{L' - L}{360^\circ}$$

$$\text{arc } Ad = \frac{L' - L}{206265''} N \sin \lambda$$

ou

$$\text{arc } Ad = \frac{L' - L}{206265''} \frac{a \sin \lambda}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \lambda}}$$

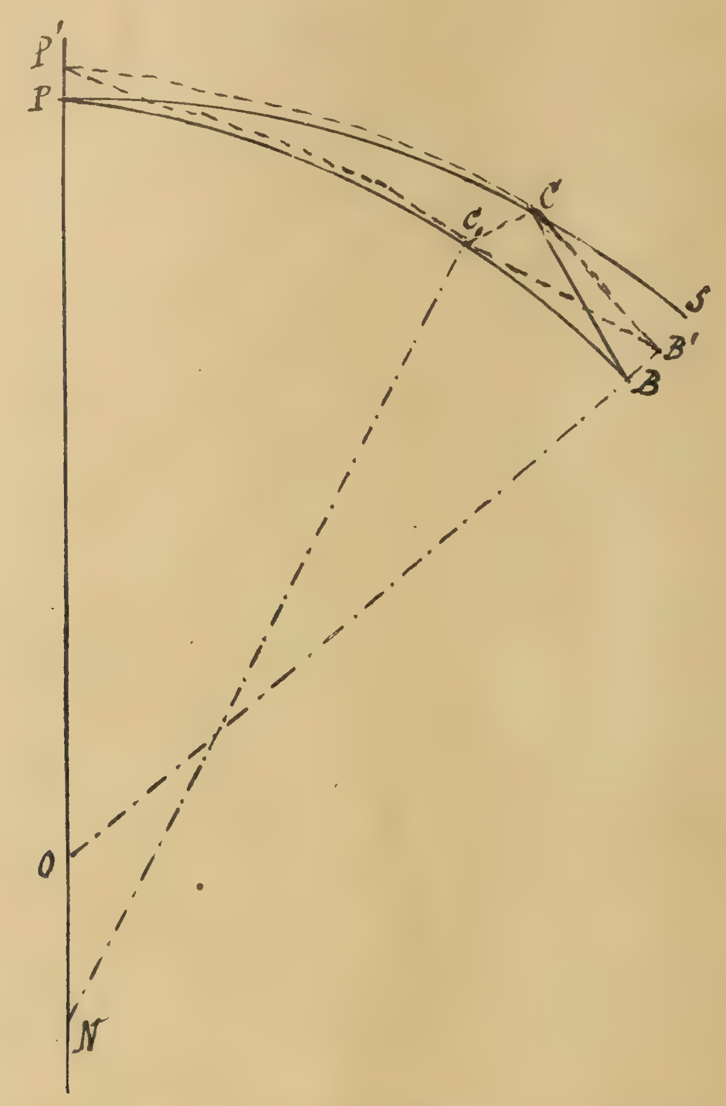
C'est une équation de condition, qui peut concourir avec celles qu'on tire de la mesure d'arcs de méridien, pour la détermination des inconnues a et e^2.

5_ Calcul des coordonnées de tous les sommets de la triangulation. Dans les chaînes méridiennes et parallèles servant de point de départ à la description géométrique d'un grand pays, on ne mesure directement les coordonnées qu'en un nombre limité de sommets. Or il faut obtenir les coordonnées, colatitude et longitude, de tous les points géodésiques. Il y en a pour l'ensemble des triangulations des divers ordres et pour la France entière 35000. Leur calcul est donc une affaire importante. On se sert des éléments obtenus pour l'ellipsoïde terrestre.

La question revient à la suivante.

Soient sur l'ellipsoïde terrestre C et B deux sommets voisins. En C, on connait les coordonnées λ et L ainsi que l'azimut $A = SCB$ du côté CB, dont la longueur K est aussi connue.

Calculer les coordonnées $\lambda' L'$ du point B ainsi que l'azimut de C vu de B.



On se sert comme intermédiaire de la sphère tangente à l'ellipsoïde le long du parallèle CC_1 passant par C. Elle a pour rayon

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \lambda}} ;$$

le rayon de courbure R de l'ellipse méridienne au point C est

$$R = \frac{a(1-e^2)}{(1 - e^2 \cos^2 \lambda)^{\frac{3}{2}}} ;$$

il en résulte

$$\frac{R}{N} = \frac{1-e^2}{1-e^2\cos^2\lambda} < 1;$$

la circonférence méridienne sera extérieure à l'ellipse méridienne; P' est l'intersection de cette circonférence avec l'axe; B' est la trace sur la sphère tangente de la verticale ou normale en B à l'ellipsoïde.

Calculons d'abord les coordonnées λ'_s et L' du point B' sur la sphère. Le triangle sphérique P'B'C donne (angle SCB = A)

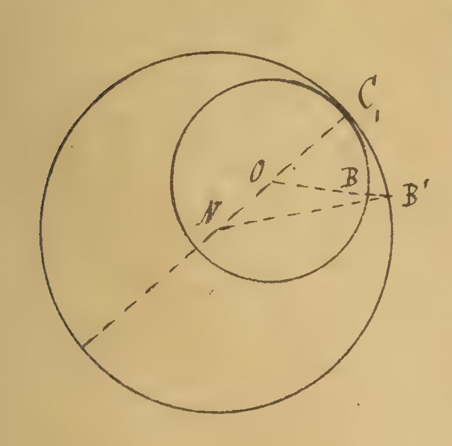
$$\cos\lambda'_s = \cos\lambda\cos\frac{K}{N} - \sin\lambda\sin\frac{K}{N}\cos A;$$

les analogies des sinus

$$\frac{\sin(L'-L)}{\sin\frac{K}{N}} = \frac{\sin A}{\sin\lambda'_s} = \frac{\sin B'}{\sin\lambda}$$

donnent $L'-L$ d'où L', et l'angle B' qui fait connaître l'azimut de C vu de B.

6 – Revenons à l'ellipsoïde. Il est clair que la différence $L'-L$ ne change pas.



Pour avoir ensuite la petite différence des colatitudes λ'_s sur la sphère et λ' sur l'ellipsoïde, on considère dans le plan méridien qui contient les points C_1, B et B', le cercle osculateur de l'ellipse méridienne en C_1, la normale en B à l'ellipse et le rayon NB'; B' est le point où la normale à l'ellipse rencontre la circonférence appartenant à la sphère tangente. Cela posé, on a dans le triangle OB'N

$$\frac{\sin OB'N}{ON} = \frac{\sin NOB'}{NB'} = \frac{\sin C_1OB'}{NB'}$$

$$C_1OB' = \lambda'-\lambda. \qquad OB'N = C_1OB' - C_1NB' = \lambda'-\lambda'_s$$

Donc

$$\frac{\sin(\lambda'-\lambda)}{N} = \frac{\sin(\lambda'-\lambda'_s)}{N-R} \qquad \sin(\lambda'-\lambda'_s) = \frac{N-R}{N}\sin(\lambda'-\lambda)$$

D'après ce qu'on a trouvé ci-dessus

$$\frac{N-R}{N} = \frac{e^2 \sin^2 \lambda}{1-e^2 \cos^2 \lambda}.$$

Pour les calculs, on substitue des développements en série aux formules rigoureuses.

Reste la différence des angles B, B'. D'après ce qu'on sait du rôle de la sphère tangente (chap. XIV, n° 6) l'angle B sur l'ellipsoïde est l'angle B' de la sphère projeté suivant les normales à l'ellipsoïde.

En considérant les angles formés par les tangentes dans les plans tangents en B et B', à l'ellipsoïde et à la sphère, on voit qu'on a la différence entre un angle B' et un angle qui serait la projection orthogonale de B' si la direction de la normale à l'ellipsoïde restait ce qu'elle est en B; cette différence est négligée comme étant du second ordre.

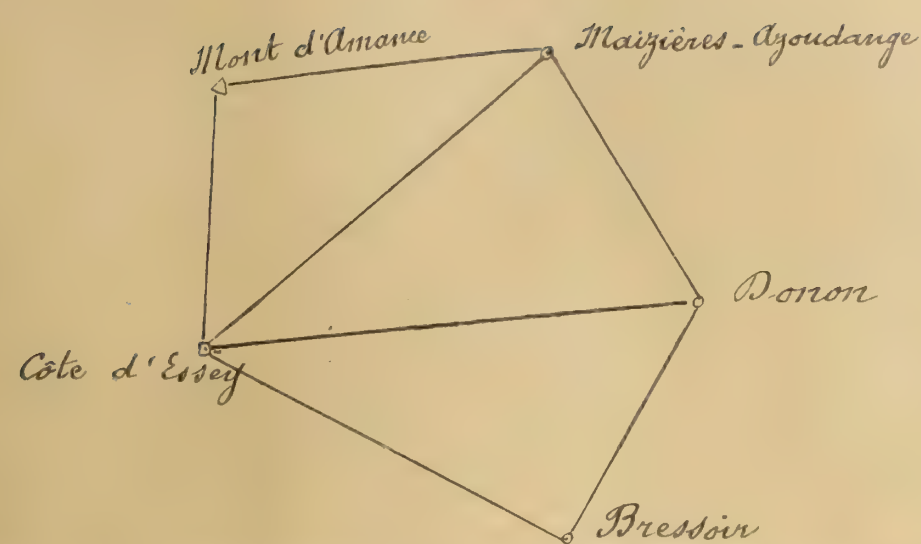
On obtient ainsi, de proche en proche, les coordonnées de tous les sommets géodésiques

7 - Comparaison des mesures géodésiques avec l'hypothèse de l'ellipsoïde de révolution.

On a des éléments de comparaison entre la théorie et les observations avec les arcs de méridiens et de parallèles déduits des mesures et calculés directement. Le calcul des coordonnées des stations de la triangulation dans lesquelles on a observé directement les coordonnées, stations aussi multipliées que possible, permet aussi beaucoup de comparaisons.

Cela présente surtout de l'intérêt pour la Géodésie théorique. A ce point de vue, la mesure des parallèles présente une utilité particulière; les Continents étant à peu près disposés suivant les fuseaux de la sphère, la terre pourrait s'écarter d'une figure de révolution, être exhaussée suivant les fuseaux des continents, et les mesures d'arcs de méridiens ne le feraient pas reconnaître. La mesure, d'un arc de parallèle s'étendant de Valentia, en Irlande, jusqu'en Russie avec une différence de longitude de 69° à ses extrémités, offre donc beaucoup d'intérêt.

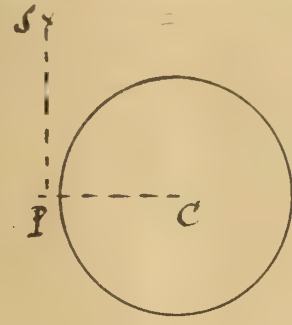
Tout récemment (pendant l'été de 1899) sur la demande de l'Association géodésique internationale, le parallèle de Paris dont la France vient de reprendre la mesure, a été rattaché au réseau géodésique allemand aux sommets figurés ci-contre.



Cette jonction va permettre de calculer la parallèle de 48° environ, dont les triangles sont mesurés jusqu'en Russie.

On peut dire que la Terre dans son ensemble ne diffère pas notablement d'un ellipsoïde de révolution ; il y a seulement quelques irrégularités.

Pour faire comprendre comment les discordances peuvent se produire, cherchons la déviation α qu'une masse sphérique



du rayon r et de densité δ, imprimerait au fil à plomb SP, tout près de sa surface à hauteur du centre C. Les attractions de cette masse et du globe terrestre supposé sphérique sont celles de masses concentrées aux centres des deux sphères et égales à leurs masses totales

$$tg\,\alpha = \frac{\frac{4}{3}\;\frac{\pi r^3 \delta}{r^2}}{\frac{4}{3}\;\frac{\pi R^3 \Delta}{R^2}} = \frac{r\delta}{R\Delta},$$

R et Δ étant le rayon et la densité moyenne du globe terrestre. α est égal à 1" si

$$\frac{r\delta}{R\Delta} = \frac{1}{206265}$$

$$r = \frac{6400.000}{206\,265}\;\frac{\Delta}{\delta}$$

Prenons $\frac{\delta}{\Delta} = \frac{1}{2}$, ce qui est à peu près le cas pour les matériaux de la croûte terrestre comparés à la densité moyenne Δ du globe terrestre; on aura à peu près

$$r = 64 \text{ mètres}.$$

Il résulte de là qu'une montagne peut agir par son attraction sur des colatitudes mesurées dans une station voisine; la détermination du rayon R du globe terrestre supposé sphérique, abstraction faite de la masse C, d'après la formule

$$2\pi R \frac{\lambda' - \lambda}{360°} = s$$

ou

$$\frac{s}{R} = \frac{\lambda' - \lambda}{206265''}.$$

pourrait être fautive dans le cas d'un arc s à faible amplitude $\lambda' - \lambda$.

On a un meilleur résultat en traitant l'ensemble des équations de conditions fournies par des mesures d'arcs s aussi longs que possible.

On conçoit que la distribution de matériaux d'inégales densités, l'existence de cavités . . . sous la croûte terrestre, puissent influencer d'une manière analogue les coordonnées mesurées; la Géodésie touche ici à la Géologie.

Il importe de rappeler que les définitions des coordonnées colatitude, longitude, sont indépendantes de la forme de la Terre, et que la manière de tracer un arc à travers une chaîne de triangles conduit, quelque soit le géoïde, à une ligne géodésique, puisque deux segments consécutifs sont dans un plan normal à la surface et dans le prolongement l'un de l'autre.

Chapitre XVII.

Nivellements géodésique et géométrique. Usage du pendule pour déterminer la figure de la Terre d'après la Théorie de Newton. Le problème de la géodésie dans l'avenir.

1. – Calcul de la différence d'altitude de deux sommets de la triangulation au moyen des distances zénithales observées.

En principe, les altitudes de deux sommets A et B sont comptées sur leurs verticales à partir de la surface de l'ellipsoïde de révolution qui se confond, sauf de très faibles ondulations, avec la surface d'équilibre des mers prolongée au dessous des continents.

Les verticales en A et B ne sont pas en général dans un même plan, cela arrive si A et B se trouvent sur un méridien ou sur un parallèle.

En fait on simplifie le problème en considérant la surface de l'ellipsoïde comme se confondant avec celle de la sphère tangente de rayon N.

Soient A et B les deux stations situées aux altitudes $Aa = h$ et $Bb = h'$. h est censé connu et il s'agit d'avoir h'.

La longueur de l'arc ab a été calculée par le théorème de Legendre qui fait connaître les longueurs des côtés des triangles sphériques; soit K sa longueur.

Désignons par Z et Z' les distances zénithales réciproques ZAB; $Z'BA$, le triangle ABC donnera,

$$\frac{N+h}{N+h'} = \frac{\sin Z'}{\sin Z};$$

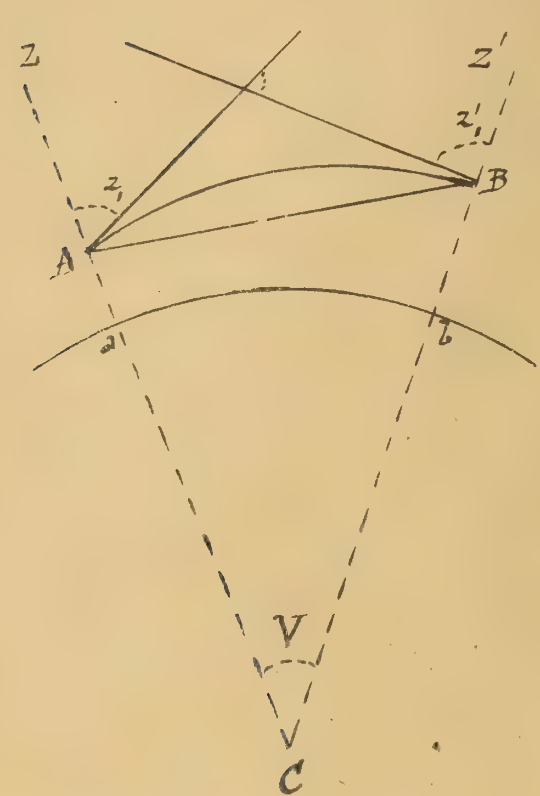
On déduit de là:

$$\frac{h'-h}{N+h} = \frac{\sin Z - \sin Z'}{\sin Z'} = \frac{2\sin\frac{Z-Z'}{2}\cos\frac{Z+Z'}{2}}{\sin Z'}$$

à cause de $Z+Z' = 180° + v$, $\quad Z' = \frac{Z'-Z}{2} + \frac{Z+Z'}{2}$, $\quad 2N\sin\frac{v}{2} = ab$

il vient le résultat suivant qui dépend seulement de la différence $z'-z$

$$h'-h = ab\left(1+\frac{h}{N}\right)\frac{\sin\frac{z'-z}{2}}{\cos\frac{1}{2}(z'-z+v)}$$



À cause de la présence de l'atmosphère, le rayon lumineux qui va de B en A décrit une courbe concave vers le sol, et dont les tangentes extrêmes comprennent la somme des réfractions terrestres.

Mais cette courbe a une courbure très faible ; on peut la confondre avec son cercle osculateur, de sorte qu'elle coupe la corde AB sous des angles égaux ; alors la différence $z-z'$ ne change pas. En appelant donc z_1 et z'_1 les distances zénithales réellement observées, il vient

$$h'-h = ab\left(1+\frac{h}{N}\right)\frac{\sin\frac{1}{2}(z'_1-z_1)}{\cos\frac{1}{2}(z'_1-z_1+v)}$$

Lorsque les côtés sont petits on peut remplacer $ab = 2N\sin\frac{K}{2N}$ par les premiers termes du développement en série.

$$ab = K\left(1-\frac{K^2}{24N^2}\right)$$

Cette formule suppose que les distances zénithales sont observées simultanément. Elle est employée pour la triangulation du premier ordre.

Dans les triangulations moins importantes on évite la nécessité des observations simultanées en introduisant la réfraction géodésique ; elle donne une relation entre z_1 z'_1 et v.

2. Réfraction géodésique. – On appelle ainsi la demi-somme des réfractions terrestres.

Réfraction géodésique $= \frac{1}{2}(z-z_1+z'-z'_1) = \frac{1}{2}(180+v-z_1-z'_1)$

que l'on peut conclure des mesures de $z_1\,z'_1$ et du calcul de v.

D'autre part, Biot a démontré que, pour un même état de l'atmosphère, la réfraction géodésique varie proportionnellement à l'angle au centre; cela est évident pour les petites valeurs de K, v devenant nul avec la réfraction géodésique, on peut donc poser

$$\text{Réfraction géodésique} = n\,v.$$

d'où

$$180^\circ + v - z_1 - z_1' = 2nv$$

La valeur de n que l'on tire de la relation $nv = \frac{1}{2}(180^\circ + v - z_1 - z_1')$, où l'on a $v = \frac{K}{N}$, diffère un peu d'un point à un autre de la Terre; elle est d'environ 0,08 d'après Delambre.

La relation ci-dessus permet de suppléer à l'ignorance d'une des quantités z_1, z_1' et v.

3. Cas où l'on n'a observé qu'une seule distance zenithale. Formule topographique. Considérons le cas où les deux stations A et B sont peu éloignées, par exemple dans les triangulations complémentaires. Remplaçons dans la formule

$$h' - h = K\left(1 + \frac{h}{N}\right) \frac{\sin\frac{1}{2}(z_1' - z_1)}{\cos\frac{1}{2}(z_1' - z_1 + v)}$$

z_1' par sa valeur tirée de l'expression de la réfraction géodésique

$$180^\circ + v - z_1 - z_1' = 2nv;$$

il vient

$$\frac{1}{2}(z_1' - z_1) = 90^\circ + \frac{1-2n}{2}v - z_1, \quad \frac{1}{2}(z_1' - z_1 + v) = 90^\circ + \frac{2-2n}{2}v - z_1$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(z_1' - z_1)}{\cos\frac{1}{2}(z_1' - z_1 + v)} = \frac{\cos z_1 \cos\frac{1-2n}{2}v + \sin z_1 \sin\frac{1-2n}{2}v}{\sin z_1 \cos\frac{2-2n}{2}v - \cos z_1 \sin\frac{2-2n}{2}v} = \frac{\cos z_1 + \sin z_1 \frac{1-2n}{2}v}{\sin z_1} = \cotg z_1 + \frac{1-2n}{2}v$$

en négligeant des termes très petits relativement à ceux que l'on garde.

Il ne reste plus qu'à remplacer v par $\frac{K}{N}$ ou $\frac{K}{R}$, R étant le rayon moyen de la Terre; il vient avec une approximation suffisante,

$$h' - h = K \cotg z_1 + \frac{1-2n}{2}\frac{K^2}{R}$$

Il y a avantage à ce que le côté K soit petit ; l'incertitude sur n a moins d'influence.

4. Correction de dépression pour les observations à la mer. Altitudes absolues. Si l'on pointe de la station A l'horizon de la mer, la trajectoire lumineuse est tangente quelque part en B à la surface de la mer, la distance zénithale z'_1 doit être égale à $90°$, la distance zénithale $z_1 = 90° + d$ étant la dépression.

C'est v qu'on va tirer de la relation générale

$$180° + v - z_1 - z'_1 = 2nv$$

en y faisant

$$z_1 = 90° + d, \quad z'_1 = 90°$$

$$v = \frac{d}{1-2n}. \quad z'_1 - z_1 = -d$$

La formule générale du n°1 de ce chapitre donne ensuite avec une approximation suffisante

$$h = ab. \sin \frac{1}{2} d$$

et, en remplaçant ab par $Rv = R \frac{d}{1-2n}$, et $\sin \frac{1}{2} d$ par l'arc,

$$\frac{2h}{R} = d. \frac{d}{1-2n}$$

d'où en minutes d'arc, $d = 3438' \sqrt{(1-2n)\frac{2h}{R}}$

La dépression d est utile à connaître pour corriger les observations de hauteurs d'astres à la mer.

La détermination de l'altitude par le pointé de l'horizon de la mer offrirait peu de garantie. Il vaut mieux partir d'un des points où la Marine et les Ponts et Chaussées ont des échelles de marées sur lesquelles sont faites des observations quotidiennes de la haute et de la basse mer, desquelles on déduit le niveau moyen.

En France, on compte les altitudes à partir d'un zéro placé au médimarémètre de Marseille.

En Algérie il y a trois médimarémètres ; celui d'Alger est pris comme fondamental.

5. Nivellement géométrique. Le nivellement géodésique effectué par distances zénithales réciproques et simultanées a l'avantage d'être très rapide.

Pour donner une idée de la précision obtenue, on peut citer le nivellement géodésique dépendant de la triangulation effectuée le long de la chaîne des Pyrénées par les Colonels Corabœuf et Peytier; il a donné une différence de 1m67 entre les niveaux de l'Océan et de la Méditerranée qu'on sait aujourd'hui être à peu près identiques.

Mais s'il s'agit de connaître les différences de niveau des points principaux des lignes de chemin de fer, des canaux... cette approximation serait insuffisante et il faut avoir recours au nivellement géométrique.

Ce nivellement s'exécute au moyen 1° d'un niveau à lunette susceptible de toutes les vérifications nécessaires.

2° de mires parlantes (parceque l'observateur peut lire lui-même la hauteur à laquelle correspond le rayon visuel), graduées avec une grande précision.

Les portées qui sont, pour le nivellement géodésique, de 20, 30, 40 Kilomètres et même davantage sont réduites à 120 ou à 150 mètres dans le nivellement géométrique.

D'après la formule topographique (Ce chapitre n° 3)

$$h' - h = K \cot z_1 + \frac{1-2n}{2}\,\frac{K^2}{R},$$

la lunette du niveau en A étant supposée réglée de sorte que le plan passant par le centre optique de l'objectif et le fil horizontal du réticule soit parallèle à la surface des eaux tranquilles, tous les points B à une même distance K de A auront une même altitude.



Soient A, B, C, D les points de la ligne à niveler, distants entre eux de 300 mètres au maximum. En ces points, on enfoncera des piquets repères porte-mires.

Plaçons deux mires l'une au point A, l'autre au point B, et, en un point S_1 également distant de A et B, plaçons le niveau à lunette

soient l_1 la lecture sur la mire A

l'_1 la lecture sur la mire B

On aura en désignant les côtes des repères par les lettres des stations correspondantes.

$$A + l_1 = B + l'_1 \text{ d'où } B - A = l_1 - l'_1$$

Cela fait, la deuxième mire restant en B, on portera la première en C et l'instrument en S_2 à égale distance des points C et B, et l'on aura pour la différence de niveau des deux points B et C

$$C - B = l_2 - l'_2$$

et ainsi de suite.

En ajoutant toutes ces équations, on voit que la différence de niveau entre le point A origine de la ligne et le point extrême sera

$$\Sigma l - \Sigma l'$$

c'est-à-dire la somme des lectures d'arrière diminuée de la somme des lectures d'avant, la première expression s'appliquant aux lectures faites du côté de l'origine, la seconde à celles faites du côté opposé.

Les méthodes pour le nivellement de précision sont dues dans le principe à un conducteur des Ponts et Chaussées Mr Bourdaloué, elles furent mises en pratique d'abord pour le nivellement du département du Cher.

Depuis lors, un service dit du Nivellement général de la France a été institué au Ministère des travaux publics, et les méthodes ont été perfectionnées grâce aux travaux de Mr Lallemand.

Le degré de précision des nivellements géométriques est considérable. L'erreur d'un nivellement bien fait ne doit pas dépasser en moyenne 3 millimètres par kilomètre, c'est-à-dire qu'en partant d'un point et revenant au même point après un parcours d'un kilomètre, les sommes des lectures d'avant et d'arrière ne doivent pas différer entre elles en moyenne de plus de 3 millimètres.

Non exigé. 6 – Usage du pendule pour déterminer la figure de la Terre, d'après la théorie de Newton. – Formule de Clairaut. On a dit (Chapitre XII, n° 1) que, dans la théorie de la figure de la Terre, supposée fluide et animée d'un mouvement de rotation uniforme, de vitesse angulaire ω autour de l'axe Oz, les composantes de la force sollicitant une molécule superficielle de coordonnées x, y, z, étaient

$$f\,\frac{\partial u}{\partial x}+\omega^2 x,\quad f\,\frac{\partial u}{\partial y}+\omega^2 y,\quad f\,\frac{\partial u}{\partial z}\,;$$

u désigne le potentiel de la masse fluide sur le point $x\,y\,z$

$$u=\int\frac{\rho\,dv}{r}$$

$\rho\,dv$ est un élément de la masse fluide de coordonnées x', y', z'.

Calculons le potentiel u en supposant le point attiré assez loin ; alors $\frac{r'}{R}$ est petit et on peut développer en série convergente suivant les puissances de $\frac{r'}{R}$. En effet

$$r^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$$

$$r^2=x^2+y^2+z^2-2(xx'+yy'+zz')+x'^2+y'^2+z'^2$$

$$r^2=R^2-2Rr'\cos V+r'^2$$

$$r^2=R^2\left(1-2\frac{r'}{R}\cos V+\frac{r'^2}{R^2}\right)$$

ensuite

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R}\left(1-2\frac{r'}{R}\cos V+\frac{r'^2}{R'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{R}\left[1-\frac{1}{2}\left(-2\frac{r'}{R}\cos V+\frac{r'^2}{R'^2}\right)+\frac{3}{8}\,4\,\frac{r'^2}{R'^2}\cos^2 V\right]$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R}+\frac{r'}{R^2}\cos V+\frac{r'^2}{R'^3}\left(\frac{3}{2}\cos^2 V-\frac{1}{2}\right)+\ldots$$

alors

$$u=\frac{1}{R}\int\rho\,dv+\frac{1}{R^2}\int r'\cos V\rho\,dv+\frac{1}{R^3}\int r'^2\left(\frac{3}{2}\cos^2 V-\frac{1}{2}\right)\rho\,dv+\ldots$$

$$\int\rho\,dv=M \quad \text{masse totale du fluide}$$

Le second terme s'écrit, en remplaçant $\cos V$ par $\frac{xx'+yy'+zz'}{Rr'}$

$$\frac{1}{R^3}\int(xx'+yy'+zz')\rho\,dv\,;$$

Si l'origine est au centre de gravité

$$\int x' \rho \, dv = \int y' \rho \, dv = \int z' \rho \, dv = 0.$$

Calculons le terme suivant

$$\frac{1}{R^3} \int r'^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 V - \frac{1}{2} \right) \rho \, dv = \frac{1}{R^5} \int R^2 r'^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 V - \frac{1}{2} \right) \rho \, dv$$

$$= \frac{1}{R^5} \int \left[\frac{3}{2} (x x' + y y' + z z')^2 - \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) \right] \rho \, dv$$

dans le cas simple d'une masse fluide homogène ou formée de couches concentriques, de révolution. Il est clair que le résultat ne doit pas changer si l'on fait tourner les particules d'un angle α, c'est-à-dire si l'on met à la place

$$\text{de } x' : \; x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \qquad \text{de } y' : \; x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

Ce qui donne à la place de

$$x x' + y y' + z z' : \; x (x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) + y (x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + z z'$$

$$(x x' + y y') \cos \alpha + (y x' - x y') \sin \alpha + z z'$$

et pour la partie indépendante de α dans $(x x' + y y' + z z')^2$

$$\frac{1}{2} (x x' + y y')^2 + \frac{1}{2} (x y' - y x')^2 + z^2 z'^2$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) + z^2 z'^2$$

le crochet dans la somme devient

$$\frac{3}{4} (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) + \frac{3}{2} z^2 z'^2 - \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

$$= z^2 z'^2 - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) z'^2 - \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2) z^2 + \frac{1}{4} (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)$$

$$= \left[z^2 - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \right] \left[z'^2 - \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2) \right].$$

et on peut écrire, K dépendant de la constitution interne de la masse,

$$w = \frac{M}{R} + \frac{z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)}{R^5} K,$$

On a ainsi les termes principaux du développement en série du potentiel.

Pour tout point de la surface libre

$$f u + \frac{1}{2} \omega^2(x^2+y^2) \text{ est constant.}$$

On en conclut que cette surface est à très peu près celle d'un ellipsoïde ; car de la relation précédente, en ne tenant compte que des premiers termes en ω^2 et K, on tire une relation telle que

$$R^2 = \text{Const} + \varepsilon\,(x^2+y^2) \qquad \varepsilon \text{ petit.}$$

Soient a et b les demi-axes de l'ellipse méridienne, égalons les deux valeurs de $f\,u + \frac{1}{2}\,\omega^2(x^2+y^2)$ au pôle et à l'équateur.

$$\frac{fM}{b} + \frac{fK}{b^3} = \frac{fM}{a} - \frac{1}{2}\,\frac{fK}{a^3} + \frac{1}{2}\,\omega^2 a^2$$

Soit

$$q = \frac{\omega^2 a}{f\frac{M}{a^2}} = \frac{1}{288}$$

le rapport de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur en négligeant les quantités d'ordre supérieur à ω^2, la relation précédente devient

$$\frac{fM}{b} + \frac{fK}{b^3} = \frac{fM}{a} - \frac{1}{2}\,\frac{fK}{a^3} + \frac{1}{2}\,\frac{fM}{a}\,q$$

on en tire

$$\frac{K}{M}\left(\frac{1}{b^3} + \frac{1}{2a^3}\right) = -\,\frac{a-b}{ab} + \frac{1}{2}\,\frac{q}{a}$$

et avec l'approximation indiquée $\left(\frac{a-b}{a} = \mu\right)$

$$\frac{K}{M} = -\,\frac{2}{3}\,a^2\left(\mu - \frac{1}{2}\,q\right)$$

$$u = \frac{M}{R} - \frac{2}{3}\,\frac{M a^2}{R^5}\left(\mu - \frac{1}{2}\,q\right)\left[z^2 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)\right];$$

le potentiel de la masse fluide sur un point extérieur est indépendant de la constitution interne.

Enfin la résultante des forces ne diffère pas sensiblement,

à cause de la faible valeur de l'aplatissement $\mu = \frac{a-b}{a}$, de sa projection sur le rayon vecteur :

$$\left(f\frac{\partial u}{\partial x} + \omega^2 x\right)\frac{x}{R} + \left(f\frac{\partial u}{\partial y} + \omega^2 y\right)\frac{y}{R} + f\frac{\partial u}{\partial z}\frac{z}{R}$$

c'est-à-dire, en appliquant le théorème sur les fonctions homogènes, de

$$-f\frac{M}{R^2} + \frac{fMa^2}{R^6}(2\mu - q)\left[\left(z^2 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)\right] + \omega^2\frac{x^2+y^2}{R}$$

On a donc

$$g = \frac{fM}{R^2} - \frac{fMa^2}{R^6}(2\mu - q)\left[z^2 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)\right] - \omega^2\frac{x^2+y^2}{R}$$

Sur la surface libre, dans les termes ayant en facteur μ et q, on fait

$$z = a\cos\lambda, \quad x^2 + y^2 = a^2\sin^2\lambda\,;$$

dans le premier terme, on prend en négligeant le carré de μ :

$$R^2 = x^2+y^2+z^2 = N^2\sin^2\lambda + N^2(1-e^2)^2\cos^2\lambda = a^2(1-e^2\cos^2\lambda\,..)$$

$$R^2 = a^2(1-2\mu\cos^2\lambda)$$

Il vient ainsi pour le rapport des accélérations de la pesanteur g et g' à la colatitude λ et à l'équateur ($\lambda = 90°$) ω^2 étant remplacé par $\frac{fM}{a^3}q$

$$\frac{g}{g'} = \frac{1+2\mu\cos^2\lambda - (2\mu - q)(\cos^2\lambda - \frac{1}{2}\sin^2\lambda) - q\sin\lambda}{1 + \frac{1}{2}(2\mu - q) - q}$$

$$\frac{g}{g'} = 1 + 2\mu\cos^2\lambda - (2\mu - q)\cos^2\lambda - \frac{1}{2}(2\mu - q)\cos^2\lambda + q\cos^2\lambda$$

$$\frac{g}{g'} = 1 + \left(\frac{5}{2}q - \mu\right)\cos^2\lambda$$

C'est aussi le rapport des longueurs des deux pendules battant la seconde à la colatitude λ et à l'équateur.

C'est la formule de Clairaut.

On montrera plus tard comment l'aplatissement μ peut être déduit de l'ensemble des observations du pendule en différentes stations.

7. Indication sur les travaux récents concernant le pendule. Il est de règle aujourd'hui d'effectuer des observations du pendule en même temps que des mesures géodésiques. Un assez grand nombre d'observations du pendule ont été faites au Sud de l'équateur et dans plusieurs îles au milieu de l'océan, où les mesures géodésiques auraient été impossibles.

La comparaison des déterminations de g a mis en évidence quelques faits caractéristiques. La formule de Clairaut est vérifiée pour l'ensemble des mesures; mais il y a de petits écarts: Sur les rivages des diverses mers l'écart paraît rester constant; dans les îles l'observation donne une valeur un peu plus forte de g;

Sur les continents l'écart est de signe contraire, et il paraît croître proportionnellement à l'altitude et à la distance à la mer.

Le mode d'observation a été beaucoup perfectionné depuis une vingtaine d'années, en particulier par le Commandant Defforges, aujourd'hui Colonel.

Plus récemment le major autrichien von Sterneck a combiné un appareil assez léger et portatif avec lequel il a étudié les variations de g dans les massifs des Alpes, ce qui offre de l'intérêt.

Enfin de nouveaux perfectionnements viennent d'être réalisés par les soins du Bureau de l'Association géodésique internationale dont il est question ci-après. Il ne paraît pas impossible qu'on arrive à déterminer g en pleine mer, avec quelque précision.

8. Association géodésique internationale pour la mesure de la Terre. Le Problème de la géodésie dans l'avenir. Cette association dont font partie aujourd'hui tous les Etats civilisés a pris naissance en 1861. Un célèbre géodésien de Prusse, le Général de Baeyer, proposa alors aux géodésiens du centre de l'Europe de s'associer en adoptant des méthodes d'observation et de calcul uniformes de manière que toute la triangulation de l'Europe centrale formât un vaste réseau continu. La France est entrée dans l'Association en 1872. Toutes les questions théoriques et pratiques qui intéressent la Géodésie: triangulations, nivellements, déterminations du pendule... sont l'objet de rapports présentés par les délégués des Etats dans les Congrès. Une Commission permanente, dont le Président était Mr Faye, assure la direction des travaux avec l'assistance d'un Bureau Central ayant son siège à Potsdam.

De grands travaux géodésiques sont activement poursuivis. Le service géographique, en France, s'occupe d'une nouvelle mesure de l'Arc du Pérou. La Russie et la Suède se sont concertées pour la triangulation du Spitzberg. L'Amérique a des chaines de triangles allant du golfe du Mexique jusqu'au Groenland. L'Angleterre se prépare à établir une chaîne ininterrompue du Cap jusqu'en Egypte.

Il faudra tirer parti de tous les résultats, triangulations, nivellements, mesures du pendule... pour corriger la première approximation de l'ellipsoïde de révolution. La théorie de Newton avec l'aide de la notion du potentiel, permet d'interpréter nettement les données d'observation. Il s'agit de trouver le potentiel u (provenant de masses cachées pour nous) de telle sorte que la résultante des forces ait pour direction celle de la verticale en chaque lieu et la pesanteur comme grandeur.

Soit en outre h la différence d'altitude du point x, y, z avec l'origine obtenue par le nivellement géométrique, le travail élémentaire de la pesanteur est

$$-g\,dh = \left(f\frac{\partial u}{\partial x} + \omega^2 x\right)dx + \left(f\frac{\partial u}{\partial y} + \omega^2 y\right)dy + f\frac{\partial y}{\partial z}\,dz$$

$$= d\left[f u + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2)\right];$$

le travail de la pesanteur d'un point à un autre est égal à la différence des valeurs de $f u + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2)$ pour les deux points

---

Chapitre XVIII.

Cartes.

1. Généralités. Ellipse indicatrice des déformations d'une carte. L'objet d'une carte est d'obtenir une représentation sur le plan d'une région plus ou moins grande de l'ellipsoïde terrestre.

Soient x, y les coordonnées rectangulaires d'un point de la carte correspondant au point de l'ellipsoïde terrestre ayant pour coordonnées l et L, on aura

$$x = f(l, L)$$

$$y = F(l, L)$$

Il est impossible de choisir un mode de correspondance tel qu'il y ait similitude entre une figure de grandeur quelconque tracée sur l'ellipsoïde et la figure correspondante sur la Carte.

On se propose alors de déterminer les deux fonctions f F de manière que les figures infiniment petites en correspondance jouissent de certaines propriétés ; égalité des angles, des surfaces...

Considérons, d'une manière générale, deux régions en correspondance de la Carte et de la surface à représenter. Rapportons la surface au plan tangent en un des points de la région. On aura pour les coordonnées rectangulaires X, Y d'un point voisin en fonction des coordonnées x, y du point correspondant de la Carte.

$$X = mx + ny + \ldots \quad Y = m'x + n'y + \ldots$$

L'étude des déformations de la carte pour la région considérée dépend de la connaissance des 4 coëfficients de x, y, ou plutot de leurs 3 rapports si l'on fait abstraction de l'échelle de la carte.

Mr Tissot, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, a montré (1) que si l'on voulait rechercher les déformations maxima des angles, des distances ou des surfaces, il suffisait de considérer sur la Carte l'ellipse correspondant à une circonférence très petite tracée sur le plan tangent autour de l'origine comme centre; cette ellipse joue le rôle d'indicatrice pour les déformations.

A l'égard des longueurs, le carré de la distance $\mathcal{E}$ d'un point (X,Y) de la surface à l'origine ayant pour expression

$$\mathcal{E}^2 = X^2 + Y^2 = (mx+ny)^2 + (m'x+n'y)^2,$$

il est clair que les plus grandes déformations auront lieu sur la carte pour les directions des axes de l'ellipse indicatrice.

$$(mx+ny)^2 + (m'x+n'y)^2 = \mathcal{E}^2$$

Les droites représentées par $mx+ny=0$, $m'x+n'y=0$ sont 2 diamètres conjugués; ce sont les transformées des axes rectangulaires $X=0$, $Y=0$.

Les rapports des longueurs correspondantes auront pour valeurs limites, a et b étant les axes de l'ellipse

$$\frac{\mathcal{E}}{a}, \frac{\mathcal{E}}{b}.$$

Posons

$$\frac{y}{x} = tg\,\theta, \quad \frac{Y}{X} = tg\,\Theta;$$

θ et Θ définissent les directions correspondantes sur la carte et sur la surface, on a

$$tg\,\Theta = \frac{m'+n'tg\,\theta}{m+n\,tg\,\theta}$$

---

(1) Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques _ 1881.

En différentiant, il vient

$$\frac{d\Theta}{\cos^2\Theta} = \frac{mn' - nm'}{(m + n \operatorname{tg}\theta)^2} \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

et en remplaçant $\frac{1}{\cos^2\Theta}$ par sa valeur $1 + \operatorname{tg}^2\Theta$,

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{mn' - nm'}{(m\cos\theta + n\sin\theta)^2 + (m'\cos\theta + n'\sin\theta)^2}$$

Soit r le rayon allant de l'origine des coordonnées au point x, y de l'ellipse : $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$\left[(m\cos\theta + n\sin\theta)^2 + (m'\cos\theta + n'\sin\theta)^2\right] r^2 = \mathcal{E}^2,$$

il vient donc

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{mn' - nm'}{\mathcal{E}^2} r^2.$$

L'équation précédente donne pour le rapport des éléments d'aires en correspondance

$$\frac{\frac{1}{2} r^2 d\theta}{\frac{1}{2}\mathcal{E}^2 d\Theta} = \frac{1}{mn' - nm'} = \text{const} = \frac{\pi ab}{\pi\mathcal{E}^2},$$

de sorte qu'on peut écrire, en mettant pour $mn' - nm'$ sa valeur $\frac{\mathcal{E}^2}{ab}$,

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{r^2}{ab}$$

Pour tirer de là l'écart entre les angles correspondants Θ et θ comptons ceux-ci à partir du grand axe de l'ellipse indicatrice. Son équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

en coordonnées polaires

$$r^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) = 1, \text{ d'où } r^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}}$$

Donc

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{1}{ab\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)} = \frac{1}{\frac{b}{a}\cos^2\theta + \frac{a}{b}\sin^2\theta}$$

Soit $\frac{a}{b} = 1 + \alpha$, α étant une petite quantité dont on néglige le carré,

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{1}{(1-\alpha)\cos^2\theta + (1+\alpha)\sin^2\theta} = 1 + \alpha\cos 2\theta$$

$$d\Theta = (1 + \alpha\cos 2\theta)\, d\theta\,;$$

intégrant

$$\Theta = \theta + \alpha\int \cos 2\theta\, d\theta = \theta + \alpha\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)_{\theta'}^{\theta''};$$

$\sin 2\theta$ étant au maximum 1 en valeur absolue, l'écart entre Θ et θ ne dépasse pas α en parties du rayon.

Le rapport des éléments angulaires en correspondance acquiert sa valeur maximum ou minimum pour les directions des axes de l'ellipse indicatrice.

En résumé, les plus grandes déformations pour les angles et pour les longueurs ont lieu suivant les directions des axes de l'ellipse indicatrice.

a et b étant les deux demi-axes de l'ellipse correspondant au petit cercle de rayon ε, quand on fait abstraction de l'échelle, le rapport des surfaces correspondantes sera $\frac{\varepsilon^2}{ab}$, le rapport des longueurs correspondantes sera compris entre $\frac{\varepsilon}{a}$ et $\frac{\varepsilon}{b}$; le rapport des angles correspondants sera compris entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$.

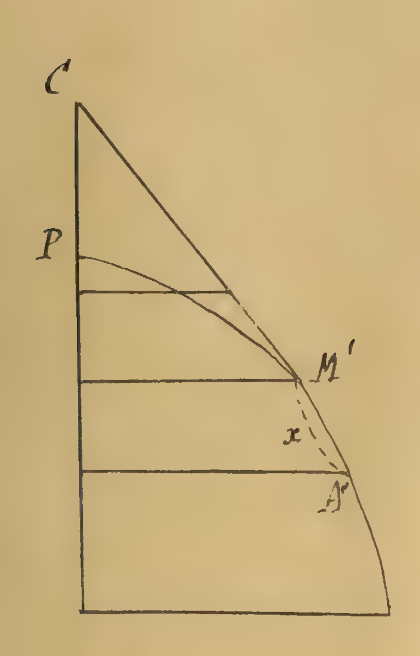
On peut remarquer la conséquence: pour que les angles soient conservés sur la carte, il faut que l'indicatrice soit un cercle

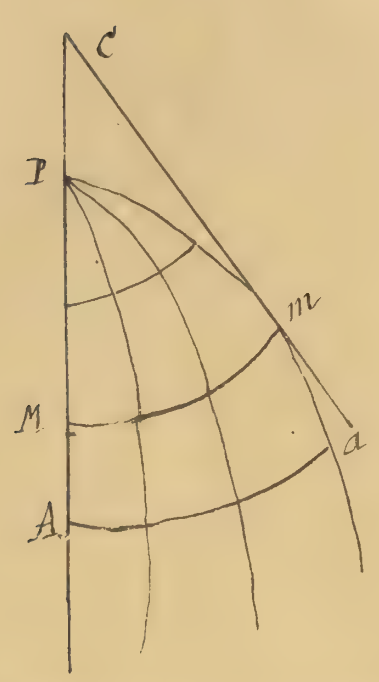
2. Différentes espèces de Cartes. On les distingue en deux classes, les cartes générales ou mappemondes et les cartes particulières.

Quant aux systèmes proposés pour les cartes, ils sont très nombreux. Les mappemondes sont habituellement construites au moyen de la projection stéréographique dont on connaît la propriété de conserver les angles.

3. Etude de la carte de l'Etat-Major. Développement du Colonel Bonne.

On prend le parallèle moyen qui traverse le pays à représenter et dont la colatitude est λ_1. On considère le cône circonscrit à l'ellipsoïde le long de ce parallèle et on le développe en prenant comme génératrice centrale celle qui touche le méridien moyen. Faisons abstraction de l'échelle de la carte.





La droite CM figurant le méridien moyen, d'un point C comme centre avec $CM' = N \operatorname{tg} \lambda$, comme rayon on décrit l'arc Mm qui représentera le parallèle moyen ; on porte sur Mm les divisions du parallèle en vraie grandeur.

Pour construire le développement d'un autre parallèle tel que celui passant par A', on porte l'arc M'A' que l'on désigne par x, en MA en sorte que

$$CA = N \operatorname{tg} \lambda_1 + x$$

et avec CA comme rayon, de C comme centre, on décrit l'arc Aa sur lequel on porte en vraie grandeur les divisions en longitude du parallèle A'.

En faisant passer un trait continu par les divisions de même longitude des parallèles ainsi tracés sur la carte, on aura les méridiens, le canevas de la carte sera obtenu : on pourra ensuite marquer les différents points d'après la connaissance de leurs coordonnées colatitude et longitude.

Les déformations sont insensibles dans le voisinage du point M. Voyons ce qu'elles peuvent être aux extrémités de la Carte au point a par exemple. Il suffit pour cela de chercher l'ellipse indicatrice correspondant à un cercle de rayon très petit ε tracé sur l'ellipsoïde au point considéré. Vu la petitesse de l'aplatissement terrestre pour simplifier le calcul, on va supposer ici que l'ellipsoïde est remplacé par une sphère, on aura

$$N = \text{Constante} = R$$

$$M'A' = x = R\alpha.$$

Les demi-diamètres conjugués de l'ellipse indicatrice dirigés suivant les tangentes en a au parallèle et au méridien ont pour longueurs

$$a' = \mathcal{E},\ b' = \frac{\mathcal{E}}{\cos I},$$

où $90° + I$ désigne l'angle des deux diamètres conjugués. En effet la longueur $\mathcal{E}$ est conservée sur le parallèle, et la distance des deux parallèles correspondant aux valeurs x et $x + \mathcal{E}$ est

$$\mathcal{E} = b' \cos I$$

Il reste à déterminer I. On rapporte le méridien Pma qui passe par a et qui répond à la longitude L à des coordonnées polaires ayant C pour pôle et CA pour axe polaire.

On a

$$\rho = Ca = CA = R(\operatorname{tg} \lambda_1 + \alpha)$$

le rayon du parallèle Aa est $R\sin(\lambda_1 + \alpha)$; on doit avoir

$$R\sin(\lambda_1 + \alpha) L = \rho\omega,$$

ω étant l'arc correspondant à l'angle formé par le rayon vecteur Ca avec l'axe polaire CMA.

En éliminant α entre les deux expressions de ρ et ω, on obtiendrait l'équation du méridien en coordonnées polaires. Il suffit de calculer l'angle I sous lequel la courbe coupe le rayon vecteur

$$\operatorname{tg} I = -\frac{\rho\, d\omega}{d\rho} = -\frac{\rho \cdot \dfrac{d\omega}{d\alpha}}{\dfrac{d\rho}{d\alpha}}$$

$$\omega = \frac{R\sin(\lambda_1 + \alpha)}{R(\operatorname{tg}\lambda_1 + \alpha)} L = L\, \frac{\sin(\lambda_1 + \alpha)}{\operatorname{tg}\lambda_1 + \alpha}$$

$$\frac{d\omega}{d\alpha} = L \cdot \frac{\cos(\lambda_1 + \alpha)(\operatorname{tg}\lambda_1 + \alpha) - \sin(\lambda_1 + \alpha)}{(\operatorname{tg}\lambda_1 + \alpha)^2}$$

$$\frac{\rho\, \dfrac{d\omega}{d\alpha}}{\dfrac{d\rho}{d\alpha}} = L \cdot \frac{\cos(\lambda_1 + \alpha)(\operatorname{tg}\lambda_1 + \alpha) - \sin(\lambda_1 + \alpha)}{\operatorname{tg}\lambda_1 + \alpha}$$

Le Colonel Bonne a supposé $\lambda_1 = 45°$. On développe l'expression en ne tenant compte que des termes du premier degré en α, λ ne variant pas entre des limites très étendues.

$$\operatorname{tg} I = -\sqrt{\frac{1}{2}}\, L.\, \frac{(1-\alpha)(1+\alpha)-(1+\alpha)}{1+\alpha} = + L \sqrt{\frac{1}{2}}\,\alpha .$$

Ce résultat montre que l'angle I est d'autant plus sensible que le produit $L\,\alpha$ est plus grand.

Pour le point le plus défavorablement situé de notre territoire, près de Brest.

$$L = 7°, \text{en arc } 0,122$$

$$\alpha = 3°\tfrac{1}{2}, \text{en arc } 0,061$$

On trouve $\operatorname{tg} I = 0,122 \times 0,707 \times 0,061 = 0,00526$

$$I = 18' \text{ environ}$$

Les axes a et b de l'ellipse indicatrice s'obtiennent au moyen des deux relations d'Apollonius

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2 = \left(1 + \frac{1}{\cos^2 I}\right)\mathcal{E}^2 = \left(2 + \operatorname{tg}^2 I\right)\mathcal{E}^2,$$

$$ab = a'b' \cos I = \mathcal{E}^2;$$

la seconde relation montre que les surfaces sont rigoureusement conservées.

On tire de ces relations

$$a^2 + b^2 + 2ab = (4 + \operatorname{tg}^2 I)\,\mathcal{E}^2$$

$$a^2 + b^2 - 2ab = \operatorname{tg}^2 I . \mathcal{E}^2 .$$

puis

$a + b = 2\mathcal{E}$ en négligeant les termes du 2° degré en $\operatorname{tg} I$

$$a - b = \operatorname{tg} I . \mathcal{E}$$

$$a = \left(1 + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg} I\right)\mathcal{E} = (1 + 0,00263)\,\mathcal{E}$$

$$b = \left(1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg} I\right)\mathcal{E} = (1 - 0,00263)\,\mathcal{E}$$

Les rapports des longueurs correspondantes sont donc compris entre

$$\frac{\mathcal{E}}{a} = 1 - 0{,}00263 \text{ et } \frac{\mathcal{E}}{b} = 1 + 0{,}00263;$$

la plus grande altération relative est de $0{,}00263 = \frac{1}{380}$.

Le rapport des éléments angulaires correspondants est compris entre

$$\frac{a}{b} = 1 + tg\,I \text{ et } \frac{b}{a} = 1 - tg\,I;$$

la différence de deux angles correspondants atteint au plus 18'.

Les plus grandes altérations ont lieu comme on l'a vu suivant les axes de l'ellipse indicatrice;

Or les deux diamètres conjugués a' b' sont égaux quand on néglige les termes du 2e degré en tg I.

$$\frac{b'}{a'} = \frac{1}{\cos I} = \sqrt{1 + tg^2 I} = 1 + \frac{1}{2}\, tg^2 I + , \dots$$

les directions des axes sont donc les bissectrices des angles formés par le parallèle et le méridien.

Ces altérations sont en somme petites et la Carte de l'Etat-Major a été prise comme un modèle pour plusieurs nations. On aurait pu diminuer un peu les altérations en prenant $\lambda_1 = 43°\,31'$ colatitude moyenne de la France.

Mr Tissot a montré, dans l'ouvrage cité, qu'on pouvait, pour des pays d'étendue modérée comme la France, déterminer les coefficients des développements supposés des coordonnées de la Carte suivant les puissances de α et I_1

$$x = p\alpha + qb + r\alpha^2 + \dots \qquad y = p'\alpha + q'I_1 + r'\alpha^2 + \dots$$

de manière à atténuer encore beaucoup les déformations.

Dans son système, la plus grande altération angulaire serait de 25'', au lieu de 18' et la plus grande déformation linéaire de $\frac{1}{1100}$ au lieu de $\frac{1}{380}$.

4- Détails sur la Carte de l'Etat-Major - Service géographique de l'Armée - Pour la construction de la Carte on a pris pour méridien central celui de Paris, et le parallèle de 45° pour parallèle moyen.

En calculant le rayon $CM = N tg\, l_1$, on le trouve égal à environ 50 mètres, à l'échelle de 1/80.000 qui est celle adoptée. Pour éviter le tracé d'arcs de cercle d'aussi grand rayon, on a calculé les positions de tous les points d'intersection des méridiens et des parallèles en les rapportant à deux axes rectangulaires.

On a formé ensuite le tableau d'assemblage des feuilles de la Carte, qui comprend 267 feuilles. Le numérotage commence au Nord et se fait de l'Ouest à l'Est.

La Carte de l'Etat Major, ordonnée dès 1808 par l'empereur, fut exécutée à partir de 1818 par le corps des ingénieurs géographes, qui se fondit en 1831 avec celui des Officiers d'Etat-Major. Le travail a duré 45 ans.

Actuellement tous les travaux géodésiques et cartographiques sont centralisés au service géographique de l'armée.

Les Officiers attachés à ce service ont fait la carte de l'Algérie et de la Tunisie d'après le même système mais en prenant pour centre de la Carte l'intersection du Méridien de Paris avec le parallèle moyen de l'Algérie. L'échelle adoptée est 1/50.000 dans le Tell de l'Algérie et de la Tunisie. Plus au Sud les cartes sont publiées au 1/200.000 pour l'Algérie et au 1/100.000 pour la Tunisie.

5. Service hydrographique de la Marine. – Il a pour objet principal de fournir à la Marine les cartes et les renseignements utiles à la navigation.

Pour les cartes, il met en œuvre non seulement les travaux de levés faits par les ingénieurs hydrographes et les Officiers de la Marine nationale, mais aussi les travaux des marines étrangères. Toutes les cartes doivent être constamment mises à jour, pour tenir compte des modifications qui se produisent dans l'éclairage et le balisage des côtes. Il y a environ 3000 Cartes hydrographiques françaises.

Des instructions nautiques renferment tous les renseignements intéressant la navigation et qui ne peuvent être fournis par les Cartes.

Le service hydrographique a dans ses attributions les instruments nautiques et hydrographiques et les différentes recherches qui s'y rapportent.

Le levé des côtes s'exécute d'après les principes communs à toutes les opérations géodésiques. L'ingénieur hydrographe

s'attache de plus à la représentation du relief sous-marin par un grand nombre de cotes de profondeurs, sondes, mesurées au dessous du niveau de la mer. Il faut qu'il étudie les marées et tout ce qui peut être utile à la navigation.

On a trouvé que le niveau moyen de la mer était partout à fort peu près le même, sauf pour les mers fermées. La mer Caspienne serait élevée de 26 mètres au dessus de la mer d'Azof.

Opérations géodésiques de Campagne.(1)

(dans le cas d'un pays nouveau)

6 - Le Corps des ingénieurs géographes avait été organisé à la suite des armées, pendant les guerres de la République et de l'Empire pour trianguler rapidement et lever les pays conquis. La manière de procéder, qui doit aussi être celle d'un explorateur désireux de réunir les éléments d'une bonne carte du pays qu'il visite, ne diffère pas dans le principe de celle exposée plus haut. Il faut toujours:

1° Mesurer une base de départ et des bases de vérification.

2° Mesurer des angles horizontaux et des distances zénithales, pour calculer ensuite les longueurs des côtés d'une chaîne de triangles et les différences d'altitude des sommets.

3° Déterminer la longitude, la colatitude ainsi que l'azimut d'un côté, à une station initiale, et mesurer ces mêmes coordonnées en d'autres points, comme contrôle, aussi souvent que possible à mesure qu'on avancera vers des régions nouvelles.

7 - Mesure des bases - Les ingénieurs géographes ont employé, en Algérie, au début de la conquête, des règles de sapin, convenablement préparé, terminées d'un côté par un cylindre métallique à génératrices verticales, de manière à bien préciser les contacts des règles successives. Ces règles étaient comparées chaque soir à une règle métallique étalonnée.

On peut encore mesurer une base avec un ruban d'acier bien étalonné à une température moyenne.

---

(1) Cours de Géodésie professé à l'Ecole de Guerre par le Commandant Bassot actuellement Général, Directeur du service géographique de l'Armée.

La mesure d'une base peut aussi s'obtenir à l'aide du temps que le son met à la parcourir. Il suffit de produire, avec un canon, à l'une des extrêmités, un éclair lumineux suivi d'une détonation violente; l'observateur placé à l'autre extrêmité de la base note le temps qui s'écoule entre la perception de l'éclair et celle de la détonation; la longueur de la base résulte ensuite de la connaissance de la vitesse du son.

$$\text{vitesse du son par seconde} = 332^m,10 \sqrt{1+0,00375t}$$

à la température t.

Il convient d'opérer de nuit et par un temps calme.
Le procédé est, bien entendu, inférieur aux deux autres.

Opérations géodésiques - Mesure des angles horizontaux et des distances zénithales.

8 - Ces mesures s'effectuent avec un théodolite de petites dimensions qui sert aux observations astronomiques aussi bien qu'aux observations géodésiques.

Avec un tel instrument, la mesure des angles horizontaux, s'effectue, comme on l'a déjà indiqué, par tour d'horizon comprenant tous les points remarquables de la contrée. Les triangles se calculent par le théorème de Legendre; il est inutile de tenir compte de l'excès sphérique.

La mesure des distances zénithales s'opère par retournement. Les différences d'altitude sont calculées par la formule topographique

$$h' - h = K \cot g\, z_1 + \frac{1-2n}{2} \frac{K^2}{R} \text{ (Chapitre}$$

9 - Observations astronomiques - Pour mesurer les distances zénithales dans les observations astronomiques, limitées à peu près exclusivement au Soleil, l'observateur a soin de déterminer la lecture du zénith sur le limbe vertical en visant un point terrestre dans les deux positions de la lunette et prenant la demi-somme des lectures.

La théorie de la détermination des coordonnées λ, L, A au moyen des observations du Soleil, a été donnée dans le chapitre V. Voici comment on opère dans une des stations.

Le matin, lorsque le Soleil a atteint une hauteur de 15° ou 20° au dessus de l'horizon, vers 8h ou 9h du matin, on vise un signal terrestre, puis le Soleil aux deux instants de tangence au fil vertical du réticule par un azimut déterminé, et l'on fait ensuite une deuxième visée sur le signal terrestre. Par cette observation, on obtient une première détermination de l'azimut.

Puis on mesure plusieurs distances zénithales de l'astre, en notant les heures au chronomètre d'où résulte une première détermination de l'heure qu'on fait suivre d'une deuxième détermination de l'azimut.

Les observations du Soleil dans le voisinage du midi vrai permettent d'avoir la colatitude.

Dans l'après-midi, on fait les observations symétriques de celles de la matinée.

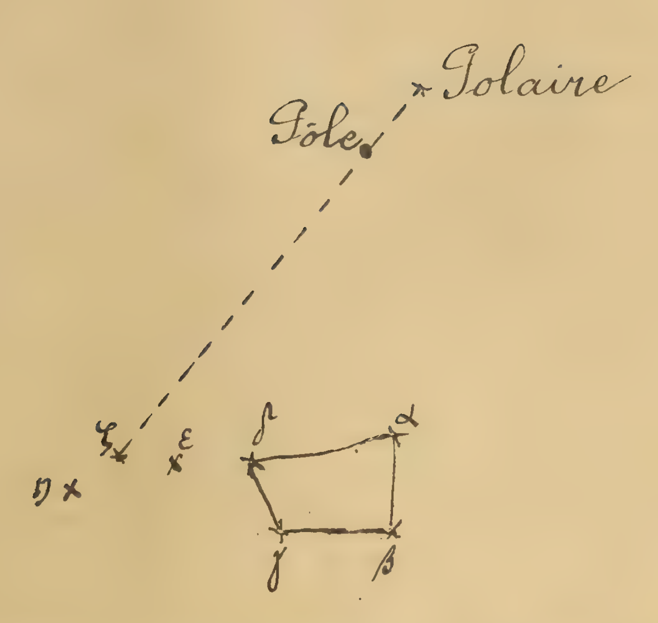
Pour déterminer l'heure du premier méridien, on peut utiliser les éclipses des satellites de Jupiter et les occultations (Chapitre V)

Que l'on soit à terre ou sur mer, le problème de la détermination de la position géographique, ou, si l'on veut, le problème du point se résout par des méthodes pareilles.

Procédés de levers rapides — Entre les points de la route où des observations astronomiques sont effectuées, l'explorateur opère à peu près comme le marin; il utilise la boussole et les procédés les plus simples pour mesurer les distances parcourues. d'autre part les différences d'altitude sont déduites des lectures du baromètre anéroïde.

La boussole doit être disposée pour permettre les visées en azimut ou, comme on dit, les relèvements des points remarquables. Il faut pour cela que l'on connaisse la déclinaison magnétique, susceptible de varier d'un point à un autre pour diverses causes.

Pour avoir la direction du méridien, on peut se servir de la polaire en mettant à profit la remarque que le pôle est actuellement sur le grand cercle joignant la Polaire à ζ grande Ourse.



On alignera un point fixe où l'on placera l'œil et un fil à plomb avec l'étoile polaire, lorsque cette étoile et ζ grande Ourse se trouveront sur une même verticale.

L'alignement à un autre moment différera un peu de celui de la méridienne, la Polaire étant à 1° 14' du Pôle.

Avec les moyens que l'on vient d'indiquer M. d'Abbadie est parvenu, à lui seul, à faire une carte de l'Abyssinie, et M. Grandidier, les PP. Colin et Roblet ont obtenu des cartes de Madagascar. (Voir le Manuel de l'Explorateur, par Blim et Rollet de l'Isle)

Des méthodes semblables ont été utilisées, par l'Amiral Mouchez pour faire rapidement l'hydrographie des côtes.

Pour la rédaction de la Carte nous renverrons au Cours de topographie et au Manuel cité.

Dans les dernières années un Cours pratique a été institué à l'observatoire du Parc de Montsouris pour les explorateurs.

Chapitre XIX.

Répétition des observations. Intervention du calcul des probabilités. Principes généraux.

1. Conséquence de la multiplication des observations. Rôle du calcul des probabilités.

En fait, les théories et les observations, nécessairement imparfaites, se précisent et se perfectionnent avec le temps; on en a vu un exemple en comparant la précision des observations au temps de Tycho-Brahé (1' à 2') à la précision des observations modernes. De même la doctrine de Copernic regardée d'abord comme admissible est devenue de plus en plus probable.

Comme conséquence de l'extension des recherches scientifiques dans le XVIIIième et le XIXième siècles, le problème s'est posé de savoir comment, après avoir accumulé les observations il y avait à les combiner pour obtenir le meilleur résultat, surtout quand il s'agit d'opérations très longues et très coûteuses comme les travaux géodésiques vis-à-vis desquels les travaux de calcul sont peu de chose, ou encore s'il s'agit du tir de l'artillerie dans lequel on se propose d'utiliser méthodiquement les coups, le plus tôt possible et de la manière la plus avantageuse. Quand on ne peut faire appel pour cela à des principes de raison, on est convenu de se décider d'après la pluralité.

On a été conduit à utiliser la théorie mathématique des probabilités, dans laquelle on assimile la production des évènements (coup court et coup long, s'il s'agit du tir) au tirage de boules contenues dans une urne et de couleurs différentes. Souvent, ce qui simplifie les formules, on est amené à supposer que le nombre des évènements est très grand.

A cause de ces suppositions, les conséquences déduites logiquement de la Théorie des Probabilités pourront être limitées dans leur application à des problèmes concrets ; il faudra les éprouver par l'expérience.

Principes généraux du calcul des probabilités.

2. Définition de la probabilité d'un événement. C'est le rapport du nombre des cas favorables au nombre de tous les cas possibles.

Cela suppose les divers cas également possibles.

Exemple : la probabilité d'extraire une boule blanche d'une urne contenant 15 boules noires et 5 boules blanches est

$$\frac{\text{nombre des cas favorables} = 5}{\text{nombre total des boules} = 20} \text{ ou } \frac{5}{20}$$

On doit supposer toutes les boules de la même grosseur et bien mélangées avant chaque tirage.

Problème. Quelle est la probabilité, dans le jeu de pile ou face d'amener face au moins une fois sur deux coups ?

4 cas sont possibles et également possibles :

On amène	F	au 1er coup	et F	au 2ième coup
	F	"	P	"
	P	"	F	"
	P	"	P	"

Sur les 4 cas également possibles, il y en a 3 de favorables, la probabilité est donc $\frac{3}{4}$.

3. Probabilités composées. Si les événements sont indépendants les uns des autres, la probabilité de la production de leur ensemble est le produit de leurs probabilités particulières.

Ainsi, la probabilité d'amener un as avec un seul dé étant $\frac{1}{6}$, celle d'amener deux as en projetant deux dés à la fois est $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. En effet, chacune des six faces de l'un peut être combinée avec les six faces de l'autre, ce qui donne un total de

36 cas également possibles parmi lesquels le cas des deux as est seul favorable. Ce raisonnement est général.

4. Probabilité totale. — La probabilité d'un évènement étant, par définition, le rapport du nombre des cas favorables à celui des cas possibles, si l'on partage les cas favorables en plusieurs groupes, la probabilité de l'évènement sera la somme des probabilités pour qu'il appartienne à chacun des groupes.

Le choix des groupes est arbitraire sous la seule condition d'y enfermer tous les cas possibles, sans qu'aucun s'y rencontre plus d'une fois.

Soit par exemple une urne contenant m boules rouges,
n boules vertes,
p boules jaunes,
N boules blanches,

pour avoir la probabilité de tirer une boule de couleur, on peut partager les cas favorables en groupes, en distinguant les boules rouges, vertes, jaunes.

La probabilité de tirer une boule de couleur est

$$\frac{m+n+p}{m+n+p+N};$$

elle est égale à la somme

$$\frac{m}{m+n+p+N}+\frac{n}{m+n+p+N}+\frac{p}{m+n+p+N}$$

dont chaque terme exprime respectivement la probabilité de tirer une boule rouge, une boule verte, une boule jaune.

5. Remarques sur l'application des principes précédents. Reprenons le problème du jeu de pile ou face : quelle est la probabilité d'amener face au moins une fois sur deux coups ?

D'Alembert raisonnait ainsi : si l'on amène face au 1er coup, il est inutile de continuer le jeu puisqu'on est certain d'avoir gagné ; les cas possibles sont donc contenus dans le tableau suivant où l'indice marque le numéro de la partie

F_1 . . . . on a gagné
P_1 F_2
P_1 P_2

et la probabilité est $\frac{2}{3}$. Mais la définition de la probabilité n'est pas respectée, les cas n'étant pas également possibles. F_1 a une parallèle $\frac{1}{2}$ tandis que les deux autres P_1F_2, P_1P_2 ont une probabilité $\frac{1}{4}$.

Maintenant, si conformément au principe de la probabilité totale, on distingue les cas favorables en deux groupes, l'un pour lequel F arrive au premier coup, l'autre pour lequel F arrive au second coup, on aura pour la probabilité cherchée

$$\text{probabilité de } F_1 + \text{probabilité de } P_1F_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

ce qui s'accorde avec le résultat déjà obtenu.

6_ Probabilités composées quand les évènements ne sont pas indépendants _ Le principe des probabilités composées énoncé plus haut exclut le cas où les évènements ne sont pas indépendants. Pour calculer la probabilité de l'arrivée successive de l'évènement A puis de l'évènement B, B dépendant de A, on fait le produit de la probabilité de A par la probabilité de B, une fois A arrivé.

Supposons que l'on ait une urne contenant
2 boules blanches et 3 boules noires
on demande la probabilité d'amener 2 blanches, quand on tire successivement deux boules sans remettre dans l'urne la première boule tirée.

Le nombre de groupes également possibles de deux boules qu'on peut amener est $(2+3) \times (2+3-1)$
cherchons le nombre de cas favorables: le premier tirage donne

soit n soit b

c'est le second cas qui seul peut fournir des cas favorables. Le calcul de la probabilité est exactement le même que si l'on avait 2 urnes contenant

l'une 3 n 2 b
l'autre 3 n 1 b

et si l'on demandait la probabilité d'amener 2 blanches.

D'après le principe des probabilités composées on trouve évidemment

$$\frac{2}{5}\ \frac{2-1}{5-1} = \frac{2}{5}\ \frac{1}{4}$$

pour la probabilité d'amener 2 blanches

On trouve par un raisonnement semblable que la probabilité d'extraire n boules blanches de suite d'une urne qui contient a blanches, b noires, c rouges . . . en tout N (en admettant qu'on ne remette pas dans l'urne les boules tirées) est

$$\frac{a}{N},\ \frac{a-1}{N-1},\ \frac{a-2}{N-2}\ \cdots\ \frac{a-n+1}{N-n+1}$$

c'est-à-dire le produit de la probabilité du tirage d'une blanche par celle du tirage d'une blanche, le premier tirage effectué, et que, les conditions restant les mêmes, la probabilité d'amener une boule blanche puis une boule noire est

$$\frac{a}{N} \cdot \frac{b}{N-1}$$

Problème - On a dans une urne 30 boules : 10 blanches, 10 noires, 10 rouges ; on en prend 3 au hasard. Quelle est la probabilité pour avoir une boule de chaque couleur ?

Faisons une hypothèse particulière en supposant que les 3 couleurs viennent dans l'ordre : blanche, noire, rouge. En vertu du principe des probabilités composées, cette hypothèse a la probabilité

$$\frac{10}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{10}{28}.$$

Le nombre des hypothèses analogues, égal au nombre des permutations de 3 lettres, est $1.2.3 = 6$. Donc la probabilité demandée est

$$6 \cdot \frac{10}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{10}{28} = \frac{100}{406}.$$

7. Extension des principes du Calcul des probabilités. On a raisonné dans ce qui précède en considérant le tirage de boules. Toutes les fois que la production d'un évènement peut-être assimilé à la sortie de boules, les principes sont applicables. Mais l'assimilation peut-être plus ou moins facile et plus ou moins juste.

Prenons comme exemple le problème suivant :

Une loterie comporte 100.000 billets et 10000 gagnants. Combien faut-il prendre de billets pour avoir probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner au moins un lot.

On peut associer aux 10000 lots 10000 boules blanches et considérer une urne contenant

$a = 10000$ boules blanches, $b = 90000$ boules noires en tout $N = a + b$, et la question est de savoir combien il faudra faire de tirages pour avoir probabilité $\frac{1}{2}$ d'amener au moins une blanche.

Soit n le nombre de tirages.

Si l'on remarque que la somme des probabilités de tous les groupes possibles de n boules est, par définition même, l'unité, et si l'on partage tous les groupes en deux classes ; groupes ne contenant que des boules noires, groupes contenant au moins une boule blanche, la question est ramenée à chercher la probabilité P pour qu'on amène n boules noires ; on prendra ensuite $1 - P$ pour la probabilité cherchée.

On a, d'après le numéro précédent,

$$P = \frac{b}{N} \cdot \frac{b-1}{N-1} \cdots \frac{b-n+1}{N-n+1}$$

les fractions successives $\frac{b}{N}, \frac{b-1}{N-1} \ldots$ vont en décroissant ; par suite

$$\left(\frac{b-n+1}{N-n+1}\right)^n < P < \left(\frac{b}{N}\right)^n$$

Pour les nombres donnés

$$1 - P = \frac{1}{2}, \qquad P = \frac{1}{2}$$

$$\frac{b}{N} = \frac{90000}{100000} = \frac{9}{10}$$

la dernière inégalité conduit à $n < 7$.

la première donne a fortiori, n étant remplacé par 7,

$$\left(\frac{b-7+1}{N-7+1}\right)^n < P, \text{ d'où } n > 6$$

Donc il faut prendre 7 billets pour avoir autant de chances de gagner que de ne pas gagner.

8. Probabilité des causes - Règle de Bayes - Aux principes des probabilités composées et de la probabilité totale il convient d'en ajouter un autre appelé souvent Règle de Bayes.

Si l'on a 2 urnes dont l'une ne contient que des boules blanches et l'autre que des boules noires, le tirage d'une blanche ne permet pas de doute sur l'urne où l'on a puisé.

Si l'on a d'un côté 10 blanches et de l'autre 1 blanche + 9 noires, il y a certainement plus de chance pour qu'une boule blanche sortie provienne de la première urne.

Le théorème suivant précise cet aperçu.

Lorsqu'un évènement observé E peut être attribué à diverses causes exclusives les unes des autres et également probables a priori, si en supposant une première cause C, la probabilité de E est p et si en supposant une 2ième cause C' la probabilité de E est p', les probabilités que les causes aient été C ou C' sont proportionnelles à p et p'.

Les causes sont assimilées à des urnes U, U' contenant des boules blanches et noires

U	a blanches b noires	U'	a' blanches b' noires

les probabilités que chacune donne lieu au tirage d'une blanche sont

$$p = \frac{a}{a+b}, \qquad p' = \frac{a'}{a'+b'}$$

cherchons la probabilité pour qu'on ait tiré une blanche de U.

Elle peut s'évaluer de deux manières :

Probabilité pour qu'on ait puisé dans V, $\frac{1}{2}$; probabilité pour que ce soit une blanche, p ; donc d'après le principe général des probabilités composées, cette première évaluation donne

$$\frac{1}{2} p.$$

Autre mode d'évaluation : probabilité pour qu'on ait tiré une blanche ; probabilité totale à calculer, puisque la boule peut venir de V ou de V'

$$\frac{1}{2} p + \frac{1}{2} p'$$

(le calcul du 1er terme vient d'être fait), soit maintenant x la probabilité pour qu'on ait puisé dans la 1ère urne, alors la probabilité pour qu'on ait tiré une blanche de V sera

$$\left(\frac{1}{2} p + \frac{1}{2} p'\right) x = \frac{1}{2} p$$

d'où

$$x = \frac{p}{p+p'}$$

Ce qui démontre le théorème

On se bornera à ce seul principe concernant la théorie dite de la probabilité des causes.

Chapitre XX.

Des lois de la probabilité qui résultent de la multiplication indéfinie des événements. Épreuves répétées. Théorème de Jacques Bernoulli.

1 – Épreuves répétées – On suppose que deux événements A et B sont contraires, c'est-à-dire que, à chaque épreuve, l'un ou l'autre arrive nécessairement. La probabilité de l'arrivée de A est p, celle de l'arrivée de B est q ; on a $p+q=1$.

Il s'agit de trouver la probabilité pour que dans un nombre μ d'épreuves, A arrive n fois et B, $\mu-n$ fois.

Pour fixer les idées, prenons des boules de deux espèces en nombre a et b contenues dans une urne. Après le tirage d'une boule on la remet dans l'urne et on recommence le tirage.

Les probabilités p et q sont les rapports des nombres de boules a et b au nombre total.

Si l'on précisait l'ordre de sortie des boules, on aurait une probabilité composée égale au produit de n facteurs p par $\mu-n$ facteurs $q = p^n q^{\mu-n}$;

---

mais l'ordre de sortie des boules a et b n'est pas déterminé ; il faut chercher combien il y a d'ordres possibles.

Considérons le produit de μ facteurs

$$(a_1 p + b_1 q)(a_2 p + b_2 q)(a_3 p + b_3 q) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (a_\mu p + b_\mu q)$$

à chaque ordre possible de sortie correspondra un groupe des lettres a et b ; par exemple, à l'ordre de sortie : une blanche une noire, une blanche . . correspondrait le groupement $a_1 b_2 a_3 \ldots$; et réciproquement, à chaque groupement des lettres correspondra un ordre de sortie.

Le coëfficient de $p^n q^{\mu-n}$ si l'on fait toutes les lettres a et b égales à 1 sera évidemment égal à la somme des modes possibles de sortie ; c'est le coëfficient du terme en $p^n q^{\mu-n}$ dans le développement du binôme.

Donc, dans le développement de

$$(p+q)^{\mu},$$

chaque terme tel que $\frac{1.2.3 \ldots \ldots \mu}{1.2 \ldots n.1.2 \ldots (\mu-n)} p^n q^{\mu-n}$ exprime la probabilité d'un évènement composé de A et B répétés autant de fois qu'il y a d'unités dans les exposants de p et q, probabilités de A et B.

On doit remarquer que la somme des termes du développement depuis le terme

$$\frac{1.2.3 \ldots \mu}{1.2 \ldots n.1.2 \ldots (\mu-n)} p^n q^{\mu-n}$$

jusqu'au terme p^{μ} inclus exprime la probabilité que, dans μ épreuves, l'évènement A arrive au moins n fois.

La somme de tous les termes du développement est égal à

$$(p+q)^{\mu} = 1;$$

Cela est d'accord avec le principe de la probabilité totale.

Application. 1° Un tir étant réglé c'est-à-dire la probabilité d'obtenir un coup court ou un coup long étant $\frac{1}{2}$, quelle est la probabilité d'avoir 3 coups courts sur 7 coups ?

On doit faire $p = q = \frac{1}{2}$, $\mu = 7$, $n = 3$ ce qui donne

$$\frac{1.2.3 \ldots 7}{1.2 \ldots 3.1.2 \ldots 4} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{7.6.5}{1.2.3} \frac{1}{2^7} = \frac{35}{128}$$

2° Quelle est la probabilité, dans le jeu de pile ou face, d'amener face au moins une fois en deux coups ?

On doit faire $p = q = \frac{1}{2}$, $\mu = 2$ et prendre les deux termes du développement de $(p+q)^2$ contenant p avec un exposant $\geqq 1$, ce qui donne

$$p^2 + 2pq = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4},$$

résultat obtenu déjà d'une autre manière.

Théorème de Bernoulli.

2. Supposons que l'on ait une urne renfermant des boules blanches et des boules noires et que l'on remette les boules dans l'urne après chaque tirage, avant de procéder à un nouveau tirage. Le rapport du nombre des boules blanches extraites à celui des boules noires sera le plus souvent très irrégulier dans les premiers tirages, mais, à la longue si on prend le résultat moyen, il doit se rapprocher, on le conçoit, du rapport des boules blanches aux boules noires contenues dans l'urne c'est-à-dire des probabilités respectives de leurs sorties.

D'après le numéro précédent, après μ tirages chaque terme du développement de

$$(p+q)^\mu$$

exprime la probabilité d'un évènement composé de A et B répétés autant de fois qu'il y a d'unités dans les exposants de p et q, probabilités de A et B.

Jacques Bernoulli a étudié (1) le plus grand terme du développement correspondant à l'évènement qui a la plus grande probabilité; il a trouvé que le plus grand terme a lieu quand les exposants n et $\mu - n$ sont proportionnels à p et q, ou si l'on veut quand les évènements arrivent dans le rapport de leurs probabilités.

De plus Jacques Bernoulli a étudié la décroissance des termes dans le voisinage du terme maximum c'est-à-dire assigné la probabilité des évènements composés de A et B répétés à peu près dans le rapport de p à q.

3. Le théorème de Bernoulli peut être énoncé comme il suit (2).

Soit un évènement E au sujet duquel on puisse réaliser un nombre indéfini d'épreuves, et supposons que les causes

---

(1) Ars Conjectandi 1713.

(2) Cet énoncé et les remarques suivantes sont empruntés en partie au Cours d'Artillerie du Capne E. Jouffret, à l'Ecole d'application de Fontainebleau.

soient constantes, c'est-à-dire que la probabilité p de son arrivée et que la probabilité $q = 1 - p$ de sa non arrivée restent les mêmes à toutes les épreuves.

La probabilité que, sur les μ épreuves, μ étant supposé très grand, E se produise un nombre n de fois tel que

$$p - \frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{\mu}} < \frac{n}{\mu} < p + \frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{\mu}}$$

où t désigne un nombre fixe, est égale à

$$\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$$

Le tableau suivant montre la marche de la fonction $\Theta(t)$

t	$\Theta(t)$
0,0	0,0000
0,5	0,5205
1,0	0,8427
1,5	0,9661
2,0	0,9953
2,5	0,9996
3,0	0,99998
3,5	0,999999
4.0	0,99999998

La propriété caractéristique de $\Theta(t)$ est de tendre rapidement vers 1.

4. Remarques sur le théorème de Bernoulli.

Il résulte de l'énoncé que si l'on se donne une valeur fixe $\Theta(t)$, si voisine qu'elle soit de l'unité, on pourra en augmentant μ c'est-à-dire en faisant un nombre suffisant d'épreuves resserrer autant qu'on le voudra l'intervalle de

$$p - \frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{\mu}} \text{ et } p + \frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{\mu}},$$

dans lequel il y a probabilité $\Theta(t)$ de voir se renfermer le rapport $\frac{n}{\mu}$.

Il faut remarquer que si le rapport du nombre des évènements E au nombre total des évènements tend vers p quand μ augmente, le nombre même des évènements E peut être soumis à des oscillations considérables; cela résulte de l'énoncé; car de

$$p - \frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{\mu}} < \frac{n}{\mu} < p + \frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{\mu}},$$

on déduit, en multipliant par μ:

$$p\mu - t\sqrt{2pq}.\sqrt{\mu} < n < p\mu + t\sqrt{2pq}.\sqrt{\mu};$$

la différence des deux limites de n est comparable à $\sqrt{\mu}$.

5. Application au tir. Un tir étant réglé, la probabilité d'obtenir des coups courts ou longs est $\frac{1}{2}$; la probabilité que l'on a de voir arriver sur un nombre μ de coups un nombre de coups courts compris entre

$$p\mu - t\sqrt{2pq}.\sqrt{\mu} \text{ et } p\mu + t\sqrt{2pq}.\sqrt{\mu}$$

est $\Theta(t)$

Si l'on fait $t = 1.90$ d'où $\Theta(t) = 0.993$ on a ce résultat contenu dans l'Aide Mémoire à l'usage des Officiers d'Artillerie.

Le nombre μ de coups tirés étant un peu grand (supérieur à 12), si le tir est réglé, il y a une probabilité de 0.993 pour que le nombre des coups courts obtenus soit compris entre

$$\frac{\mu}{2} - 1.33\sqrt{\mu} \text{ et } \frac{\mu}{2} + 1.33\sqrt{\mu}.$$

On voit que si le nombre des coups courts tend vers $\frac{1}{2}$ par rapport au nombre total, il peut osciller toutefois entre des limites croissant avec $\sqrt{\mu}$.

Dans le cas où les limites seraient dépassées, on serait alors seulement en droit de croire à quelque chose d'anormal.

Ici le théorème de Bernoulli met en garde contre des conclusions trop hâtives.

Soit dans l'exemple précédent $\mu = 16$.

Sur 16 coups, on peut en attendre de courts un nombre compris entre

$$8 - 4 \times 1.33 = 8 - 5.32 \text{ et } 8 + 5.32$$

c'est-à-dire compris entre 3 et 13.

Si l'on observait plusieurs coups courts successifs, il ne faudrait donc pas trop se hâter de conclure que le tir est mal réglé.

6 - Principe des recherches statistiques. — Le théorème de Bernoulli montre que la répétition indéfinie des événements met en évidence la composition d'une urne renfermant des boules blanches et noires. On comprend d'après cela qu'il soit regardé comme le fondement des recherches statistiques. Toutefois, les relevés d'observations qu'il faut prendre aussi nombreuses que possible, afin d'avoir des résultats moyens plus sûrs, s'ils indiquent des valeurs numériques pour la probabilité de l'apparition de tel ou tel événement ne peuvent renseigner sur les causes supposées connues jusqu'ici et figurées par des urnes.

Il pourra arriver que les relevés suggèrent quelque loi en hypothèse; on en suivra les conséquences pour la préciser ou la rejeter. Mais on doit se garder, d'après ce qui a été trouvé au n° précédent, dans le cas idéal de causes simples et constantes, de conclusions hâtives.

Chapitre XXI.

Étude à posteriori des erreurs des observations.

1. Étude à posteriori des erreurs des observations. – Dans ce qui suit au lieu de déduire de théories mathématiques des conséquences applicables, dans une mesure à apprécier, aux faits d'observation, on commence par quelques constatations expérimentales, susceptibles d'extension, tout au moins valables pour les classes d'expériences d'où elles sont tirées.

Il peut arriver lorsqu'on compare plusieurs séries de déterminations d'un même élément, par divers observateurs, au moyen de différents instruments, qu'il y ait une différence notable d'une série à l'autre; il peut arriver par exemple qu'un des instruments fournisse des valeurs toujours plus petites ou plus grandes, par suite de quelque défaut instrumental. On appelle les erreurs qui se produisent toujours dans le même sens des erreurs systématiques.

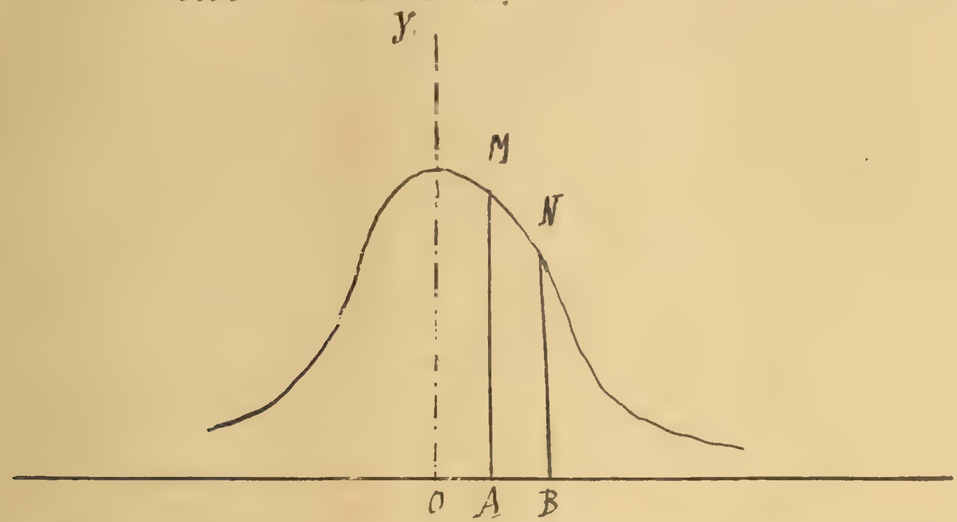
Ce cas écarté, les diverses déterminations ne s'accorderont pas d'une manière absolue; mais puisqu'on suppose exclues les erreurs systématiques, les erreurs qui restent ne paraîtront suivre aucune loi; ce seront des erreurs fortuites ou accidentelles par opposition aux erreurs systématiques.

Si l'on rassemble toutes les déterminations, on constate qu'elles tendent à se grouper de manière que les mesures discordantes avec le groupe principal deviennent d'autant moins nombreuses que la discordance est plus grande; les erreurs positives et négatives sont à très peu près en nombre égal.

Il est nécessaire de préciser cet aperçu en faisant appel à des expériences appropriées, telles qu'on puisse être sûr qu'il ne subsiste plus que des erreurs accidentelles; il faut pour cela qu'on connaisse a priori la véritable valeur de la quantité à déterminer; les erreurs des déterminations relativement à la valeur connue seront des erreurs absolues.

C'est ce qui arrive, en particulier, pour les erreurs de fermeture (Chapitre XIV, n° 10) des triangles géodésiques; elles représentent des erreurs absolues.

Pour représenter graphiquement la loi des erreurs, on prend deux axes de coordonnées ; on divise l'axe des abscisses en parties proportionnelles à 0",1, 0",2 . . . et on construit les rectangles successifs ayant pour base l'intervalle de 0",1 et des surfaces proportionnelles au nombre des erreurs comprises entre les deux abscisses limitant chaque rectangle ; puis on trace une courbe continue.



Cette courbe offre une symétrie remarquable par rapport à OY.

Elle se rapproche rapidement de l'axe Ox.

Le nombre d'erreurs comprises entre les abscisses $OA = a$, $OB = b$, rapporté au nombre total des erreurs, égal au rapport $\frac{\text{aire } MNAB}{\text{aire totale de la courbe}}$, est par extension, la probabilité pour qu'une erreur soit comprise entre a et b ; l'aire totale de la courbe peut être substituée à l'aire limitée par les erreurs les plus fortes parceque les portions d'aires qu'on ajoute sont insignifiantes, la courbe tendant rapidement vers l'axe Ox.

2. Cas des erreurs petites - Formule théorique - L'hypothèse que les erreurs systématiques sont exclues ou, si l'on veut, que les erreurs positives et négatives sont symétriques, suffit à déterminer la loi de probabilité des erreurs accidentelles supposées assez petites pour que leurs carrés et produits soient négligeables.

Soit

$$y = \varphi(x)$$

l'équation de la courbe de probabilité ; la probabilité pour qu'une erreur soit comprise entre x et $x + dx$ sera

$$\frac{\varphi(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx}$$

On peut, x étant très petit, remplacer $\varphi(x)$ par le développement

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)\,x + \frac{\varphi''(0)}{1.2}\,x^2 + \frac{\varphi'''(0)}{1.2.3}\,x^3 + \frac{\varphi^{IV}(0)}{1.2.3.4}\,x^4 \dots$$

On admet qu'il n'y a pas d'erreur systématique; qu'il y a symétrie entre les erreurs positives et négatives; on doit avoir

$$\varphi(x) = \varphi(-x);$$

$\varphi'(0)$ et $\varphi'''(0)$ sont donc nuls.

Le droit de négliger x^2 devant x donne a fortiori celui de négliger x^4 devant x^2 et de réduire le développement à

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{\varphi''(0)}{2}\,x^2$$

En posant

$$\varphi(x) = C e^{-h^2x^2},$$

on est donc sûr d'avoir une loi tout au moins valable pour les erreurs petites; On ne peut rien affirmer pour les erreurs notables. Cependant l'expérience montre que cette formule donne, en général, trop peu d'erreurs notables.

3. Comparaison de la loi théorique avec l'expérience. Définitions de l'erreur moyenne quadratique, de l'erreur moyenne, de l'erreur probable. On a dit que la probabilité pour qu'une erreur soit comprise entre x et $x + dx$ est en général

$$\frac{\varphi(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx}$$

Si l'on prend

$$\varphi(x) = C e^{-h^2x^2}$$

à cause de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h},$$

il vient pour la probabilité d'une erreur comprise entre x et $x + dx$

$$\frac{\varphi(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx} = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2x^2}\,dx$$

et pour la probabilité $P(x)$ d'une erreur comprise entre $-x$ et $+x$,

$$P(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{+x} e^{-h^2x^2} dx$$

ou, en introduisant la fonction $\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$,

$$P(x) = \Theta(hx).$$

Il reste à déterminer h pour que la loi de probabilité soit bien connue. La valeur de h peut être déduite des observations de plusieurs manières.

1° Avec l'erreur moyenne quadratique $\mathcal{E}_1$ dont le carré est la moyenne arithmétique des carrés de toutes les erreurs qui se présenteraient dans un très grand nombre d'expériences, on a

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{h\sqrt{2}}$$

Démonstration. La probabilité que l'erreur soit comprise entre x et $x + dx$ étant, par définition

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx = \frac{\text{nombre des erreurs comprises entre } x \text{ et } x+dx}{\text{nombre total des erreurs}}$$

si on multiplie de part et d'autre par x^2, on a

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-h^2x^2} dx = \frac{\text{somme des carrés des erreurs comprises entre } x \text{ et } x+dx}{\text{nombre total des erreurs}}$$

On fait la somme des carrés de toutes les erreurs en intégrant de $-\infty$ à $+\infty$; il vient d'après la définition de l'erreur moyenne quadratique

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-h^2x^2} dx = \mathcal{E}_1^2$$

La valeur de l'intégrale définie du premier membre s'obtient en différentiant par rapport à h la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h} ;$$

il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -2hx^2 e^{-h^2x^2} dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{h^2}$$

$$\varepsilon_1^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-h^2x^2} dx = \frac{1}{2h^2}$$

2° Avec l'erreur moyenne m, moyenne arithmétique des valeurs absolues de toutes les erreurs, abstraction faite des signes, qui se présenteraient dans un très grand nombre d'expériences ; on a

$$m = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}$$

Pour démontrer cette relation, après avoir écrit comme plus haut

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx = \frac{\text{nombre des erreurs comprises entre } x \text{ et } x+dx}{\text{nombre total des erreurs}}$$

on multiplie les deux membres par (x) et on intègre entre $-\infty$ et $+\infty$

$$m = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-h^2x^2} x\, dx$$

L'intégrale définie s'obtient aussitôt

$$\int e^{-h^2x^2} \left(-2h^2x\right) dx = e^{-h^2x^2}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-h^2x^2} x\, dx = \left(-\frac{e^{-h^2x^2}}{2h^2}\right)_0^{+\infty} = \frac{1}{2h^2}$$

d'où

$$m = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}$$

3° Avec l'erreur probable η telle que la probabilité d'une erreur comprise entre $-\eta$ et $+\eta$ soit égale à $\frac{1}{2}$ ou, si l'on veut, telle qu'il y ait autant d'erreurs plus grandes que d'erreurs plus petites, de sorte qu'elle occupe le milieu dans la liste des erreurs rangées par ordre de grandeur.

On a donc pour déterminer r la relation

$$\frac{1}{2} = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-r}^{+r} e^{-h^2x^2}dx = \Theta(hr)$$

elle donne

$$hr = 0.4769\ldots$$

Remarques. I. Le rapport de l'erreur probable r à l'erreur moyenne quadratique $\mathcal{E}_1$ est

$$\frac{r}{\mathcal{E}_1} = \frac{0.4769}{h} : \frac{1}{h\sqrt{2}} = 0,6745. \text{ soit } \frac{2}{3} \text{ à peu près}$$

II. La valeur de $\mathcal{E}_1 = \frac{1}{h\sqrt{2}}$ est l'abscisse du point d'inflexion de la courbe de probabilité $y = Ce^{-h^2x^2}$.

4. Calcul d'après la loi de probabilité, pour une série d'observations, du nombre théorique des erreurs comprises entre des limites données.

On a vu que le rapport du nombre des erreurs comprises entre les limites $-x$ et $+x$ au nombre total des observations ou la probabilité de ces erreurs était

$$P(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{+x} e^{-h^2x^2}dx = \Theta(hx);$$

le rapport en question dépend donc de la valeur du produit hx; on sait qu'il est égal à $\frac{1}{2}$ quand x est égal à l'erreur probable r.

Écrivons

$$hx = hr \times \frac{x}{r} = 0,4769.. \times \frac{x}{r},$$

la valeur de $P(x)$ dépendra du rapport de l'erreur supposée x à l'erreur probable r, qu'il est avantageux d'introduire par ce qu'elle résulte immédiatement de l'inspection du tableau des erreurs rangées par ordre de grandeur.

Dans la première colonne du Tableau suivant, se trouve le rapport de l'erreur x à l'erreur probable r; dans la seconde, on donne, sur 1000 observations, le nombre des erreurs plus petites que x.

On constate que ce nombre, quand x est égal à l'erreur probable est 500; il y a autant d'erreurs inférieures à l'erreur probable que d'erreurs plus grandes.

Table donnant, sur 1000 observations le nombre P d'erreurs plus petites que f Ɲ (Ɲ erreur probable)

f	P	Différences	f	P	Différences
0,0	0		2,5	908	
0,1	54	54	2,6	921	13
0,2	107	53	2,7	931	10
0,3	160	53	2,8	941	10
0,4	213	53	2,9	950	9
0,5	264	51	3,0	957	7
0,6	314	50	3,1	963	6
0,7	363	49	3,2	969	6
0,8	411	48	3,3	974	5
0,9	456	45	3,4	978	4
1,0	500	44	3,5	982	4
1,1	542	42	3,6	985	3
1,2	582	40	3,7	987	2
1,3	619	37	3,8	990	3
1,4	655	36	3,9	991	1
1,5	688	33	4,0	993	2
1,6	719	31	4,1	994	1
1,7	748	29	4,2	995	1
1,8	775	27	4,3	996	1
1,9	800	25	4,4	997	1
2,0	823	23	4,5	998	1
2,1	843	20	4,6	998	0
2,2	862	19	4,7	998	0
2,3	879	17	4,8	999	1
2,4	895	16	4,9	999	0
2,5	908	13	5,0	999	0

5. Comparaison des erreurs de fermeture de 661 triangles, de la triangulation italienne, avec la loi théorique des écarts. (E. Czuber : Théorie der Beobachtungsfehler p. 194. Voir aussi les Publications de l'Association géodésique internationale, 1892)

On a trouvé $\varepsilon_1 = 14'',08 \qquad \eta = 9'',497$

La Table permet de calculer le nombre d'erreurs comprises entre $-x$ et $+x$.

La comparaison du nombre théorique des écarts avec les écarts observés est donnée dans le tableau suivant

Limite des écarts	Nombre théorique des écarts	Nombre observé des écarts	Différence
0' 1,768	66	68	−2
0 3,566	132	139	−7
0 5,424	198	200	−2
0 7,383	264	265	−1
0 9,500	331	333	−2
0 14,08	451	457	−6
0 23,16	595	586	+9
0 36,27	654	653	+1
0 46,35	660	661	−1
0 54,79	661	661	0

6. Comparaison de la loi théorique avec les expériences de Mr Cornu. (Mémoire sur la détermination de la vitesse de la lumière. Annales de l'Observatoire de Paris, t. XIII).

Une condition nécessaire résulte des relations

erreur moyenne quadratique $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{h\sqrt{2}}$

erreur moyenne $m = \dfrac{1}{h\sqrt{\pi}}$;

On doit avoir

$$\frac{2\varepsilon_1^2}{m^2} = \pi$$

Mr Cornu trouve (p. 220 du Mémoire déjà cité)

$$\mathcal{E}_1^2 = 178{,}012\,;\quad m = 10{,}648$$

$$\frac{2\mathcal{E}_1^2}{m^2} = 3.1401 \text{ au lieu de } 3.1416\,;$$

l'accord est remarquable

Le tir du canon fournirait un autre exemple ; mais en général les coups sont relativement peu nombreux et les résultats de la comparaison de l'expérience et de la théorie seraient moins nets.

7. Pourquoi le paramètre h est appelé mesure de la précision. Poids des observations.

Reprenons la relation $P(x) = \Theta(hx)$. A une valeur donnée de la probabilité $P(x)$ correspond une valeur du produit hx. Plus le paramètre h est grand, plus petite est l'erreur qu'il est également probable de ne pas dépasser. Les carrés h^2 ou plutôt leurs rapports caractérisent d'une manière analogue la précision respective des observations : on les appelle les poids des observations.

Remarque. Il y a une analogie manifeste entre la loi de probabilité des erreurs fortuites et la loi de probabilité des écarts dans les épreuves répétées.

Le paramètre h de la formule théorique est dans un rapport constant avec $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$, μ désignant le nombre des épreuves répétées.

Chapitre XXII.

Lois de la probabilité des erreurs provenant de la combinaison d'erreurs indépendantes les unes des autres. Conséquences. Erreurs de situation d'un point. Tir à la cible.

1. Exemple de combinaison d'erreurs. On détermine dans un tir, la distance du but avec un télémètre. Il y a une erreur ε. Ensuite, quand on tire il y a une erreur ε' propre à la pièce. Les erreurs ε et ε' suivent la loi théorique et les mesures de précision sont h et h'. Cela posé, les deux écarts ε et ε' se combinent pour donner l'écart $\varepsilon + \varepsilon'$. Un quelconque des écarts ε est a priori associable avec un quelconque des écarts ε'.

2. Loi de probabilité de l'erreur résultante. Les erreurs ρ résultant de la combinaison

$$\varepsilon + \varepsilon'$$

d'erreurs dont les lois de probabilité respectives sont

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} dx, \quad \frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2 \varepsilon'^2} dx,$$

suivent encore la loi théorique puisque (Chapitre précédent n°2) il y a évidemment symétrie pour les erreurs résultantes positives et négatives et que ces erreurs sont petites, donc la probabilité d'une erreur résultante comprise entre ρ et $\rho + dx$ sera

$$\frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 \rho^2} dx,$$

On a d'après un résultat connu (Chapitre précédent, n°3)

$$(\text{erreur moyenne quad. résultante})^2 = \frac{1}{2H^2} = \frac{\Sigma(\mathcal{E}+\mathcal{E}')^2}{\text{nombre total des erreurs}}$$

$$(\mathcal{E}+\mathcal{E}')^2 = \mathcal{E}^2 + \mathcal{E}'^2 + 2\mathcal{E}\mathcal{E}';$$

la moyenne des valeurs de $\mathcal{E}\mathcal{E}'$ est nulle; les moyennes de $\mathcal{E}^2$ et $\mathcal{E}'^2$ donnent par définition, et à cause du résultat cité,

$$\text{moyenne des } \mathcal{E}^2 = \mathcal{E}_1^2 = \frac{1}{2h^2},$$

$$\text{moyenne des } \mathcal{E}'^2 = \mathcal{E}_1'^2 = \frac{1}{2h'^2}.$$

On a donc la relation

$$\frac{1}{H^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h'^2}$$

La démonstration faite pour deux erreurs s'étend au cas général puis qu'on peut composer les erreurs de proche en proche

3. Mesure de précision d'une fonction de quantités observées indépendantes les unes des autres.
Le Calcul se fait comme dans le Nº précédent.

A_0, B_0, C_0 étant des valeurs exactes de A, B, C les erreurs de $F = F(A, B, C.)$ seront

$$F(A, B, \ldots) - F(A_0, B_0, \ldots) = \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_0 \mathcal{E} + \left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)_0 \mathcal{E}' + \ldots,$$

en se bornant à la partie principale.
En élevant au carré les deux membres, divisant par le nombre total des erreurs, il viendra, à cause de la relation

$$\mathcal{E}_1^2 = \frac{1}{2h^2}$$

et des relations analogues

$$\frac{1}{H^2} = \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_0^2 \frac{1}{h^2} + \left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)_0^2 \frac{1}{h'^2} + \ldots;$$

$h, h' \ldots H$ sont les mesures de précision des quantités $A, B \ldots$ et V.

De là résulte pour l'erreur moyenne quadratique et l'erreur probable de F des théorèmes faciles à énoncer.

4. Erreur probable d'une somme ou d'une moyenne de n déterminations.

L'erreur probable d'une somme de n déterminations est égale à l'erreur probable d'une détermination multipliée par $\sqrt{n}$.

L'erreur probable de la moyenne de n déterminations est égale à l'erreur probable d'une détermination divisée par $\sqrt{n}$.

Ce sont deux conséquences du résultat général.

On a dans le premier cas $F = A + B + \dots, \frac{\partial F}{\partial A} = \frac{\partial F}{\partial B} = \dots = 1$

dans le second cas $F = \frac{A+B+\cdot}{n}, \frac{\partial F}{\partial A} = \frac{\partial F}{\partial B} = \dots = \frac{1}{n}$

5. Modification à apporter au calcul de h lorsqu'on ne connait pas les erreurs absolues.

Jusqu'ici on a supposé dans le développement de la théorie qu'on avait affaire aux erreurs absolues: différences des déterminations et de la valeur exacte.

Il y a une légère modification à introduire dans le calcul de h quand on possède seulement, comme il arrive d'ordinaire, les erreurs apparentes, différences des déterminations et de leur moyenne arithmétique prise à la place de la valeur exacte que l'on ne connait pas.

La modification dont il s'agit résulte de ce théorème

La mesure de précision des erreurs apparentes λ a pour mesure de précision $h\sqrt{\frac{n}{n-1}}$ si h est la mesure de précision des erreurs absolues et n le nombre des déterminations.

Soient $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$ les erreurs absolues des n déterminations.

$$\lambda_1 \lambda_2 \quad \lambda_n \text{ les erreurs apparentes}$$

les λ diffèrent des ε correspondants d'une quantité constante α; la somme des λ est nulle; donc

$$(\varepsilon+\alpha)+(\varepsilon_2+\alpha)+ \quad +(\varepsilon_n+\alpha)=0 \quad \alpha=-\frac{(\varepsilon)}{n}$$

en désignant en général par (A) la somme des quantités $A + A' + \dots$

On a donc

$$\lambda_i = \varepsilon_i - \frac{(\varepsilon)}{n} = \frac{n-1}{n}\,\varepsilon_i - \frac{V}{n}, \text{ où } V = (\varepsilon) - \varepsilon_i$$

L'erreur apparente λ_i dépend donc de l'erreur absolue ε_i et de la somme V des $n-1$ erreurs ε restantes. les deux systèmes d'erreurs sont indépendants; appliquant le théorème général du N° 3 et désignant par h' la mesure de précision pour les erreurs V, donnée par $\frac{1}{h'^2} = (n-1)\frac{1}{h^2}$, la mesure de la précision H, dans le cas des erreurs apparentes, est donnée par la relation

$$\frac{1}{H^2} = \frac{1}{h^2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^2 + \frac{1}{h^2}\,\frac{n-1}{n^2} - \frac{1}{h^2}\,\frac{n-1}{n}.$$

On a par suite

$$\frac{1}{h^2} = \frac{n}{n-1}\,\frac{1}{H^2};$$

et l'erreur moyenne quadratique ε s'obtient en faisant le calcul avec les erreurs apparentes et multipliant ensuite le résultat par $\sqrt{\frac{n}{n-1}}$.

Si n est un nombre assez grand, $\sqrt{\frac{n}{n-1}}$ différera peu de l'unité et la modification indiquée par le théorème sera sans importance.

Applications.

6. Forme à donner aux triangles géodésiques. Il suffit de considérer les triangles comme plans.

Soit le triangle ABC dans lequel le côté a est connu. On suppose l'angle C fixe, et on veut savoir pour quelle forme de triangle l'erreur probable de b calculé d'après la relation

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad \text{d'où} \quad b = a\,\frac{\sin B}{\sin A}$$

a la plus petite valeur. On admet naturellement que la loi des erreurs fortuites est la même pour la mesure des angles A et B ; soit h la mesure de précision.

On a d'après la loi de combinaison des erreurs (Ce chapitre n° 3) en ne faisant pas varier a et considérant la mesure de précision H de log. b fonction de A. B.

$$d\mathcal{L}b = \frac{dB}{tgB} - \frac{dA}{tgA}$$

$$\frac{1}{H^2} = \frac{1}{tg^2A}\,\frac{1}{h^2} + \frac{1}{tg^2B}\,\frac{1}{h^2} = \left(\frac{1}{tg^2A} + \frac{1}{tg^2B}\right)\frac{1}{h^2}$$

Il s'agit de savoir pour quelles valeurs de A et B la parenthèse a la plus petite valeur ; on a du reste

$$A + B = 180^\circ - C = \text{Constante}.$$

Il faut pour cela que les dérivées partielles par rapport à A et B de la parenthèse soient égales ; par suite que $A = B$.

L'égalité des angles diminue les erreurs probables des côtés.

Erreurs de situation d'un point. Lois de la répartition des points de chute dans le tir à la cible.(1)

7. On a considéré dans ce qui précède les erreurs dépendant d'une seule variable, les seules erreurs en portée, par exemple, dans le cas du tir. La théorie s'étend aux fonctions de plusieurs variables. On peut, par exemple, considérer les deux coordonnées u et v définissant la position d'un point dans le plan, étudier les erreurs d'un point ; c'est le cas du tir à la cible.

(1) J. Bertrand. Calcul des probabilités, n° 185.

Si l'on désigne par

$$\varphi(u,v)\,du\,dv$$

la probabilité pour que l'erreur soit comprise entre

$$u \text{ et } u+du, \qquad v \text{ et } v+dv,$$

la condition de symétrie des erreurs conduit, comme on l'a vu, à prendre nuls dans φ les termes impairs en u et v:

$$\varphi(u,v)=\varphi(0)+\frac{au^2}{2}+buv+\frac{cv^2}{2}+\dots$$

et à écrire pour la probabilité

$$Ge^{-h^2u^2-2\lambda uv-k^2v^2}\,du\,dv.$$

Il s'agit, comme dans le cas des erreurs linéaires, de calculer les valeurs des paramètres G, h, λ, k d'après les observations.

On cherche pour cela les moyennes des valeurs de u^2, v^2, uv, u et v désignant les coordonnées du point où frappe la balle, par rapport à deux axes passant par le centre de gravité de tous les points frappés, supposés très nombreux.

Ce calcul s'exécute comme plus haut le calcul de la somme des carrés des erreurs dans le cas d'une seule variable.

En égalant aux valeurs données par les expériences les résultats du calcul, on a 3 conditions; une quatrième résulte de ce que la somme des probabilités relatives à toutes les erreurs possibles est égale à l'unité.

Cela posé, les ellipses concentriques ayant pour équation,

$$h^2u^2+2\lambda uv+k^2v^2=\text{Const}.$$

sont appelées les courbes d'égale probabilité; elles jouissent

de cette propriété que la surface circonscrite par chacune d'elles est parmi toutes les surfaces de même superficie celle qui a la plus grande chance d'être atteinte et dans laquelle il tombera le plus grand nombre de coups.

Mr Bertrand a appliqué la théorie précédente à l'examen de 1000 coups tirés par des tireurs habiles à 200 mètres de distance avec 10 armes de même modèle, chaque tireur tirant 10 coups avec chaque arme.

Il a trouvé

$$h^2 = 0,000\,8825$$

$$h'^2 = 0,000\,7732$$

$$\lambda = 0,0000\,452\,;$$

c'est-à-dire que les ellipses diffèrent peu de cercles; c'est ce qu'on admet pour les armes portatives. Alors la loi de probabilité ne dépend que de la distance au centre de la cible. On est conduit à des résultats analogues à ceux obtenus dans le cas le plus simple d'une variable unique (Voir le cours d'Artillerie du Commandant Hermary et du Capitaine Hatin).

Le tableau ci-après indique le nombre de balles dans les divers intervalles entre les ellipses correspondant aux probabilités $\frac{1}{10}, \frac{2}{10} \ldots 1$.

Intervalles	Nombre de balles	Diffé- avec 100
I	99	+ 1
II	106	− 6
III	100	0
IV	108	− 8
V	100	0
VI	118	− 18
VII	86	+ 14
VIII	94	+ 6
IX	90	+ 10
X	99	+ 1

On peut juger du degré de l'accord de la théorie avec l'expérience.

A la loi de combinaison des erreurs correspond dans le cas de deux variables une théorie analogue plus générale mais plus compliquée ; on la trouvera exposée dans une note de M.r d'Ocagne insérée dans le Bulletin de la Société mathématique de France (1895).

Chapitre XXIII.

Combinaison des observations. Méthode des moindres carrés.

1_ Résultat de plusieurs observations - Erreur systématique - erreur accidentelle.

... Prenons un exemple simple. Il s'agit de mesurer une quantité. Un observateur a fait un grand nombre de déterminations. On ne peut répondre qu'il n'y ait pas des erreurs systématiques et le contraire est même certain, on peut du moins estimer qu'elles sont petites et constantes, autrement une marche progressive apparaîtrait dans les déterminations.

Soient

$$x = n$$

$$x = n'$$

$$x = n''$$

$$\cdots\cdots$$

les résultats des mesures; σ désignant l'erreur systématique constante mais inconnue des mesures, il faudrait prendre, en posant $X = x + \sigma$,

$$X = n + \sigma$$

$$X = n' + \sigma$$

$$X = n'' + \sigma$$

$$\cdots\cdots$$

Si l'on prend pour la valeur de X la moyenne de m déterminations

$$X = \sigma + \frac{n + n' + n'' + ..}{m} = \sigma + \frac{(n)}{m};$$

on a vu que l'erreur probable de la moyenne était $\frac{\eta}{\sqrt{m}}$, η étant l'erreur probable d'une détermination. On écrit ainsi le résultat avec l'indication de l'erreur probable

$$X = \frac{(n)}{m} + \sigma \pm \frac{\eta}{\sqrt{m}}$$

Toute la question est de faire en sorte que les deux termes σ et $\pm \frac{\eta}{\sqrt{m}}$ soient aussi petites que possible.

2. Importance de la combinaison des observations —

Prenons l'exemple de la mesure d'un angle avec un vernier. Il peut y avoir, dans le cas d'un seul vernier, une erreur systématique constante si les lectures sont faites à peu près dans la même région. L'emploi de deux verniers opposés élimine l'erreur systématique de l'excentricité et l'erreur probable de la moyenne des deux lectures est égale à celle d'une lecture divisée par $\sqrt{2}$. Il y a donc un avantage manifeste. l'inconvénient de deux lectures au lieu d'une est peu de chose en général.

Mais, si dans un autre cas, pour éviter les erreurs systématiques, on était amené à compliquer par trop les opérations, les erreurs fortuites pourraient devenir notables parce que, dans les mêmes circonstances, on ne pourrait effectuer qu'un nombre moindre d'opérations, alors on n'éviterait les erreurs systématiques qu'en exagérant les erreurs fortuites. Il y a donc, on le conçoit, un choix à faire.

Il est clair que d'un observateur à l'autre, et suivant l'instrument, σ et $\frac{\eta}{\sqrt{m}}$ pourront différer. Si chaque observateur a fait beaucoup d'observations, $\frac{\eta}{\sqrt{m}}$ devient négligeable, il ne reste plus que les erreurs systématiques que la comparaison des séries fait alors reconnaître; et s'il y a beaucoup d'observateurs, on peut espérer que dans la moyenne générale les erreurs systématiques σ, tantôt positives, tantôt négatives se détruiront.

Ces remarques s'étendent aux systèmes d'équations plus compliquées que nous allons considérer.

3 – Réduction des équations de condition à la forme linéaire.
Si les équations de condition ne sont pas linéaires, on peut habituellement les ramener à cette forme moyennant la connaissance de valeurs approchées des inconnues

$$f(x, y, z, \dots) = 0$$

étant l'une des équations de condition

$$x_0, y_0, z_0, \dots$$

des valeurs approchées des inconnues, on posera

$$x = x_0 + \delta x, \qquad y = y_0 + \delta y, \qquad z = z_0 + \delta z, \dots;$$

on développera par rapport à $\delta x, \delta y, \delta z \dots$ et supposant ces corrections assez petites pour qu'on puisse se contenter de leurs premières puissances on sera conduit, pour les déterminer à des équations de la forme

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \delta z + \dots + f_0 = 0,$$

l'indice 0 signifiant que les variables x, y, z .. ont été remplacées par les valeurs approchées $x_0, y_0, z_0, \dots$

On se bornera donc à considérer des équations linéaires telles que

$$ax + by + cz + \dots = n,$$

les coëfficients a, b, c étant donnés par le calcul et pouvant être regardés comme exempts d'erreur, n étant au contraire donné directement par les observations et affecté de leur incertitude

4 – Méthode des moindres carrés proposés par Legendre.[1]
Les valeurs des inconnues ne doivent point satisfaire nécessairement à l'une des équations en particulier, mais bien à leur ensemble et de la manière la plus exacte possible.
Si l'on connaissait les valeurs précises des inconnues, et si on les substituait dans les premiers membres des équations, les valeurs numériques que prendraient ces premiers

(1) Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes. Paris 1805, pages 72, 75.

membres feraient connaître les erreurs des observations correspondantes, en supposant, comme nous le faisons, que les quantités observées soient représentées par les n.

Legendre a proposé, en 1805, de rendre minimum la somme des carrés des différences entre le calcul et l'observation. Cette condition qui a fait donner à la méthode le nom de méthode des moindres carrés fournit d'ailleurs un nombre d'équations égal au nombre des inconnues.

Soient

$$ax + by + cz + \dots = n$$

$$a'x + b'y + c'z + \dots = n'$$

$$\dots\dots$$

les équations à traiter.

La somme des carrés des erreurs ou des résidus sera

$$(ax + by + cz + \dots - n)^2 + (a'x + b'y + c'z + \dots - n')^2 + \dots$$

Pour en trouver le minimum, on égale à zéro les dérivées partielles par rapport aux variables x, y, ..

On arrive ainsi aux équations dites finales en nombre égal à celui des inconnues.

$$a(ax + by + cz + \dots - n) + a'(a'x + b'y + c'z + \dots - n') + \dots = 0,$$

$$b(ax + by + cz + \dots - n) + b'(a'x + b'y + c'z + \dots - n') + \dots = 0,$$

qu'on écrit ainsi

$$(aa)\,x + (ab)\,y + (ac)\,z + \dots = (an),$$

$$(ab)\,x + (bb)\,y + (bc)\,z + \dots = (bn),$$

$$(ac)\,x + (bc)\,y + (cc)\,z + \dots = (cn),$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

Legendre, pour justifier ce procédé, se borne à dire

« qu'il s'établit entre les erreurs une sorte d'équilibre qui empêchant les extrêmes de prévaloir, est très propre à faire connaître l'état du système le plus proche de la vérité ». Il remarque aussi que la règle par laquelle on prend la moyenne entre les résultats de différentes observations n'est qu'une conséquence très simple de la méthode des moindres carrés

En effet, si l'observation a donné diverses valeurs n, n' ... pour une certaine quantité x, la somme des carrés des erreurs sera

$$(x-n)^2+(x-n')^2+\dots$$

et la condition du minimum donne

$$(x-n)+(x-n')+\dots=0,$$

c'est-à-dire qu'il faut prendre x égal à la moyenne des valeurs observées.

5. Idée des recherches de Gauss et de Laplace sur la méthode de Legendre ; Elle est conforme à la théorie des probabilités.

Gauss a publié, en 1809, ses premières recherches sur la question (1). Il justifie la méthode de Legendre en admettant comme un axiome l'hypothèse que si une quantité a été déterminée par plusieurs observations immédiates, effectuées dans les mêmes circonstances et avec un même soin (la supposition d'une erreur constante étant exclue), la moyenne arithmétique entre toutes les valeurs observées donne la valeur la plus probable de cette quantité ; il trouve que la probabilité d'une erreur comprise entre x et $x+dx$ (c'est-à-dire le rapport du nombre des erreurs comprises entre ces limites au nombre total des erreurs) étant représentée par $\varphi(x)\,dx$, on a

$$\varphi(x)=Ge^{-h^2x^2}.$$

Laplace, dans sa Théorie analytique des probabilités, publiée en 1812, expose comme il suit le résultat des recherches de Gauss (voir la fin du chapitre IV)

(1) Theoria motus corporum cœlestium in sectionibus conicis solem ambientium. Gœttingue, 1809, 3ième section.

« M. Gauss a cherché à rattacher la méthode des moindres carrés à la Théorie des probabilités en faisant voir que la même loi des erreurs des observations, qui donne généralement la règle de la moyenne arithmétique entre plusieurs observations, admise par les observateurs, donne pareillement la règle des moindres carrés des erreurs des observations. Mais, comme rien ne prouve que la première de ces règles donne le résultat le plus avantageux, la même incertitude existe par rapport à la seconde. »

Laplace parle ensuite de ses recherches, et après avoir dit que si les observations sont en petit nombre on ne peut obtenir de conclusions indépendantes de la loi des erreurs de chaque observation, il conclut : Mais, si l'on considère un grand nombre d'observations, ce qui a lieu le plus souvent dans les recherches astronomiques, l'analyse conduit alors indépendamment de cette loi, aux résultats de la méthode des moindres carrés des erreurs d'observation, du moins lorsqu'on ne veut employer que des équations finales qui soient linéaires .... ; autrement l'élimination des inconnues et leur détermination seraient impraticables.

Plus tard, Gauss a abandonné son point de vue primitif pour adopter celui de Laplace ; et il a montré que indépendamment du nombre des observations et de la loi des erreurs (supposées assez petites pour que leurs carrés et produits soient négligeables) les équations linéaires fournies par la méthode des moindres carrés étaient les plus avantageuses.

L'ensemble des Mémoires de Gauss, sur la méthode des moindres carrés a été traduit et publié en français par J. Bertrand.

6. Justification de la méthode des moindres carrés.

On part de la loi des erreurs fortuites démontrée pour les petites erreurs et reconnue conforme à l'expérience dans de larges limites.

Il s'agit, en prenant le cas de deux inconnues x, y, et le système d'équations

$$a x + b y = n + \sigma$$
$$a' x + b' y = n' + \sigma'$$
$$a'' x + b'' y = n'' + \sigma''$$
$$\cdots\cdots$$

où n, n', n'' sont les quantités mesurées, $\sigma, \sigma', \sigma''$ les erreurs systématiques des mesures dont on ne saurait faire abstraction, de chercher le meilleur système de valeurs pour x et y parmi tous les couples de valeurs x, y.

Pour chaque système de valeurs de x et y portées dans les équations, on trouve un système d'erreurs ou résidus.

$$ax + by - n - \sigma = \varepsilon$$

$$a'x + b'y - n' - \sigma' = \varepsilon'$$

$$a''x + b''y - n'' - \sigma'' = \varepsilon''$$

$$\cdots\cdots$$

Suivant la loi théorique (chapitre XXI) les probabilités p, p', p''.. pour que ces erreurs ou résidus soient compris entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$, $\varepsilon' + d\varepsilon'$ ... sont dans le cas général des mesures de précision h différentes

$$p = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon, \qquad p' = \frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2\varepsilon'^2} d\varepsilon' \ldots$$

Appliquons, en l'étendant au cas actuel, le principe de la probabilité composée. La probabilité de l'existence simultanée de ces erreurs aura pour expression

$$p.p'.p''\ldots = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \frac{h'}{\sqrt{\pi}} \ldots e^{-h^2\varepsilon^2 - h'^2\varepsilon'^2 \ldots} d\varepsilon\, d\varepsilon' d\varepsilon'' \ldots;$$

Or en vertu de la règle de Bayes (chapitre XXI), parmi tous les systèmes de valeurs de x y causes des erreurs $\varepsilon\, \varepsilon' \varepsilon''$ le plus probable est celui qui répond à l'évènement le plus probable, c'est-à-dire à la plus petite valeur de

$$h^2\varepsilon^2 + h'^2\varepsilon'^2 + \ldots,$$

ou au minimum de la somme des carrés des résidus des équations préalablement multipliées par h, h'.. c'est-à-dire (Chap. XXI, n° 7) par les racines des poids respectifs attribués aux observations.

Les quantités du second membre sont alors ramenées à avoir le même poids, ce que nous supposerons désormais. Quand on laisse de côté les $\sigma, \sigma', \sigma''$ on retombe sur les équations finales de Legendre.

7. La méthode proposée par Legendre conduit aux valeurs des inconnues, mais n'indique pas le degré de précision des inconnues. La méthode a été complétée sous ce rapport.

Bien qu'elles soient devenues d'un usage fréquent, les règles ci-après ne peuvent avoir comme on aura occasion de le redire à la fin du chapitre, un caractère absolu, puisqu'on est obligé de faire abstraction des erreurs systématiques $\sigma, \sigma', \sigma''$... inconnues.

8. Comment on calcule les Erreurs moyennes et probables des inconnues

On applique le théorème sur l'erreur d'une fonction de quantités indépendantes (Chapitre XXII n°3) : le carré de l'erreur moyenne d'une fonction de quantités indépendantes est la somme des carrés des erreurs moyennes de la fonction, chaque quantité variant séparément, aux expressions des valeurs des inconnues.

Soient un système de m équations à une inconnue, la mesure de précision est supposée la même,

$$a\,x = n$$

$$a'\,x = n'$$

$$\cdots$$

la méthode des moindres carrés donne cette expression de l'inconnue x

$$x = \frac{(a\,n)}{(a\,a)},$$

On différentie l'expression de x par rapport à $n, n', \ldots$

$$d\,x = \frac{a}{(a\,a)}\,d\,n + \frac{a'}{(a\,a)}\,d\,n' + \ldots;$$

On prend la moyenne des carrés des deux membres; on supprime les doubles produits comme dans le théorème du N° 3 chapitre

Par analogie avec ce qu'on a vu (Chapitre XXV, n° 5), les moyennes des dn^2, dn'^2.. sont prises égales à

$$\varepsilon_1^2 = \frac{(\varepsilon\varepsilon)}{m-1},$$

en général s'il y a m équations et i inconnues à

$$\varepsilon_1^2 = \frac{(\varepsilon\varepsilon)}{m-i};$$

ε_1 est appelé l'erreur moyenne à craindre ou simplement l'erreur moyenne dans le système de mesures.

La racine carrée de la moyenne des carrés dx^2 sera l'erreur moyenne à craindre sur x ou simplement l'erreur moyenne de x.

Par suite

$$\text{l'erreur moyenne de } x = \sqrt{\frac{a^2 + a'^2 + ..}{(aa)^2}}\,\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{1}{(aa)}}\cdot\varepsilon_1$$

Dans le cas de

$$a = a' = .. = 1,$$

$$x = \frac{n + n' + ..}{m};$$

l'erreur moyenne de $x = \dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{m}}$.

Soient les m équations à deux inconnues

$$ax + by = n,$$

$$a'x + b'y = n',$$

$$a''x + b''y = n'',$$

$$\cdots\cdots$$

Les équations finales sont

$$(aa)x + (ab)y = (an),$$

$$(ab)x + (bb)y = (bn),$$

on en tire

$$x = \frac{(an)(bb) - (ab)(bn)}{(aa)(bb) - (ab)^2}$$

$$y = \frac{(bn)(aa) - (ab)(an)}{(aa)(bb) - (ab)^2}$$

L'erreur moyenne dans le système de mesures sera

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{(\varepsilon\varepsilon)}{m-2}}$$

$\varepsilon, \varepsilon'$ .. étant les résidus des équations après qu'on y a substitué les valeurs de x et y.

Pour avoir les erreurs moyennes des inconnues, de x par exemple, on différentie son expression par rapport à n, n', .. ce qui donne, en désignant le dénominateur par D,

$$D\,dx = \left[(bb)a - (ab)b\right]dn$$

$$+ \left[(bb)a' - (ab)b'\right]dn'$$

$$+ \left[(bb)a'' - (ab)b''\right]dn''$$

$$+ \dots$$

les erreurs moyennes de n, n', .. sont prises égales à ε_1, l'erreur moyenne de x sera donnée par

$$D^2 \varepsilon x^2 = \left\{\left[(bb)a - (ab)b\right]^2 + \left[(bb)a' - (ab)b'\right]^2 + \dots\right\}\varepsilon_1^2,$$

qui peut s'écrire

$$D^2 dx^2 = \left\{ (bb)^2(aa) + (ab)^2(bb) - 2(bb)(ab)(ab) \right\} \mathcal{E}_1^2,$$

$$D^2 dx^2 = (bb) D \mathcal{E}_1^2,$$

d'où

erreur moyenne de $x = \sqrt{\frac{(bb)}{D}}\ \mathcal{E}_1$.

Or $\frac{(bb)}{D}$ est la valeur qu'on obtiendrait pour x lui-même si on remplaçait dans les équations finales (an) par 1 et (bn) par zéro.

On trouverait de même

erreur moyenne de $y = \sqrt{\frac{(aa)}{D}} \cdot \mathcal{E}_1$

c'est-à-dire $\mathcal{E}_1$ multiplié par la racine carrée de la valeur qu'on obtiendrait pour y si, dans les équations finales, on remplaçait (an) par zéro et (bn) par 1.

La généralisation de ces résultats est facile.

On passe des erreurs moyennes aux erreurs probables des inconnues en multipliant les premières par $\frac{2}{3}$.

Exemples d'application de la méthode des moindres carrés.

I. Détermination de l'aplatissement μ de l'ellipsoïde terrestre au moyen du pendule. (Cours de Mr Faye)

La longueur l du pendule qui bat la seconde est liée à l'aplatissement $\mu = \frac{a-b}{a}$ de l'ellipsoïde terrestre par l'équation de Clairaut :

$$l = l' + \left(\frac{5}{2} q - \mu\right) l' \cos^2 \lambda,$$

où l' désigne la longueur du pendule à l'équateur, q le rapport $\frac{1}{288.36}$ de la force centrifuge à la pesanteur équatoriale

et λ la colatitude. Voici diverses mesures de l effectuées en divers points du globe :

Spitzberg ...	$\lambda = 10^\circ\, 11'$	$l = 996^{mm},13$	Obs^r Sabine
St Pétersbourg	30 3	994 ,97	Lutke
New-York	49 17	993 ,24	Sabine
Jamaïque	72 4	991 ,56	Sabine
Ile St Thomas	89 35	991 ,19	Sabine
Rio Janeiro	112 55	991 ,77	Freycinet
Montevideo	124 54	992 ,70	Forster
Cap Horn	145 51	994 ,62	Forster
New Shetland	152 56	995 ,23	Forster

Posons, pour réduire les équations à la forme linéaire,

$$l' = 991^{mm} + x\,;$$

il viendra pour le coëfficient de $\cos^2 \lambda$

$$\left(\tfrac{5}{2}\,q-\mu\right) l' = \left(\tfrac{5}{2}\,q-\mu\right) \times 991^{mm} + \left(\tfrac{5}{2}\,q-\mu\right) x\,;$$

le second terme est négligeable, on peut poser

$$\left(\tfrac{5}{2}\,q-\mu\right) l' = \left(\tfrac{5}{2}\,q-\mu\right) \times 991^{mm} = y$$

On aura, en donnant le même poids à tous les résultats, les équations suivantes

$$5^{mm},13 = x + 0,969\,y$$
$$3\;,97 = x + 0,749\,y$$
$$2\;,24 = x + 0,426\,y$$
$$0\;,56 = x + 0,095\,y$$
$$0\;,19 = x +$$
$$0\;,77 = x + 0,152\,y$$
$$1\;,70 = x + 0,327\,y$$
$$3\;,62 = x + 0,685\,y$$
$$4\;,23 = x + 0,793\,y.$$

Les équations finales sont

$$22^{mm},41 = 9,000\,x + 4,196\,y,$$

$$15\;\;,45 = 4,196\,x + 2,918\,y;$$

On en tire

$$x = 0^{mm},065, \qquad y = 5^{mm},200.$$

Par conséquent, la longueur du pendule, qui bat la seconde, est

$$\text{à l'équateur } 991^{mm},065,$$

$$\text{aux pôles } 996\;\;,200$$

Pour l'aplatissement, on a

$$\left(\frac{5}{2} \times \frac{1}{288,36} - \mu\right) \times 991^{mm} = 5^{mm},200$$

on en tire

$$\mu = \frac{1}{292}.$$

Il y a ensuite à déterminer l'erreur moyenne dans ce système de mesures. Pour cela, on substitue dans les équations les valeurs de x et y pour avoir les résidus ε.

Nombres observés	Nombres calculés	ε	ε^2
$5^{mm},13$	$5^{mm},11$	$+0^{mm},02$	0,0004
3 ,97	3 ,96	+0 ,01	0,0001
2 ,24	2 ,28	−0 ,04	0,0016
0 ,56	0 ,56	0 ,00	0,0000
0 ,19	0 ,07	+0 ,12	0,0144
0 ,77	0 ,86	−0 ,09	0,0081
1 ,70	1 ,76	−0 ,06	0,0036
3 ,62	3 ,63	−0 ,01	0,0001
4 ,23	4 ,19	+0 ,04	0,0016

$$(\varepsilon\varepsilon) = 0,0299$$

on prend pour l'erreur moyenne $\mathcal{E}_1$ dans le système de mesures

$$\mathcal{E}_1 = \sqrt{\frac{0,0299}{9-2}} = 0^{mm},065$$

puisque 9 est le nombre des équations et 2 celui des inconnues.

Ensuite, pour avoir les erreurs moyennes de x et y, on résout les deux systèmes :

$$\begin{array}{l|l} 9,000\,x' + 4,196\,y' = 1 & 9,000\,x' + 4,196\,y' = 0 \\ 4,196\,x' + 2,917\,y' = 0 & 4,196\,x' + 2,917\,y' = 1 \end{array}$$

$$\text{d'où } x' = \frac{1}{2.96} \qquad \text{d'où } y' = \frac{1}{0,96}$$

et on prend pour les erreurs moyennes de

$$x : 0^{mm},065\sqrt{\frac{1}{2.96}} = 0^{mm},038$$

$$y : 0^{mm},065\sqrt{\frac{1}{0,96}} = 0^{mm},067$$

Pour le dénominateur N de l'aplatissement $\mu = \frac{1}{292}$, l'erreur moyenne s'obtiendra en différentiant

$$\left(\frac{5}{2}\,q - \mu\right) \times 991^{mm} = y$$

d'où

$$\frac{dN}{N^2} \cdot 991^{mm} = dy,$$

ce qui donne pour l'erreur moyenne de N

$$\frac{0,067}{991} \times (292)^2 = 5,7,$$

et pour l'erreur probable $\frac{2}{3} \times 5,7 = 3.8$

On écrit

$$\text{aplatissement } \mu = \frac{1}{292 \pm 4}$$

10. Compensation des angles d'un triangle géodésique.
On a mesuré les angles d'un triangle géodésique et trouvé

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

On veut remplir d'autre part la condition rigoureuse

$$x + y + z = 180^\circ + \varepsilon \qquad \varepsilon \text{ excès sphérique calculé.}$$

On exprime que la somme des carrés

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$$

est minimum, en même temps que

$$x + y + z = 180^\circ + \varepsilon = \text{Constante}$$

On égale les dérivées partielles des deux expressions par rapport à x, y, z :

$$\frac{x - a}{1} = \frac{y - b}{1} = \frac{z - c}{1} = \frac{x + y + z - a - b - c}{3} = \frac{180^\circ + \varepsilon - a - b - c}{3};$$

c'est-à-dire qu'on distribue également l'erreur entre les angles.

11. Remarques essentielles. Dans l'exposition de la méthode des moindres carrés, on a admis que les quantités mesurées n, n', n''... étaient affectées d'erreurs systématiques ; bien que l'on soit dans l'ignorance quant à la nature des erreurs systématiques, il faut admettre le fait de leur existence.

Les remarques faites au n°1 sur l'expression de l'inconnue nécessairement affectée d'une erreur systématique et d'une erreur accidentelle sont encore valables, en ce sens que les expressions des inconnues comportent une erreur systématique et une erreur accidentelle qui tend vers zéro à mesure qu'augmente le nombre des mesures.

Il n'y aura donc pas lieu de s'étonner si les valeurs d'une inconnue déduites de plusieurs séries, d'après diverses méthodes, présentent des discordances dépassant plusieurs fois l'erreur probable calculée.

12. Simplifications possibles dans les calculs – On a vu que, pour avoir les équations finales N° 4, la première par exemple, on multipliait les deux membres des équations successives par les coëfficients de x. On peut ne pas s'astreindre à prendre les valeurs mêmes des coëfficients, avec toutes leurs décimales; il est indiqué d'arrondir les membres pour faciliter les multiplications; par exemple on remplace chaque coëfficient par une partie aliquote : $\pm \frac{1}{10}, \pm \frac{2}{20} \ldots$ du plus grand, on abrège ainsi les calculs tout en respectant le principe de la méthode.

Avant l'introduction de la méthode des moindres carrés, on formait les équations finales en multipliant les deux membres des équations successives par $+1$ et -1, suivant le signe du coefficient.

Cette dernière méthode a été perfectionnée par Cauchy et Villarceau.

Chapitre XXIV.

Observations de Bradley et de Lacaille. Découvertes d'Herschel. Structure de l'Univers. Particularités du système solaire.

1. Observations de Bradley et de Lacaille (dans l'hémisphère austral). Pourvu en 1742 de la charge d'Astronome Royal à l'observatoire de Greenwich, Bradley se hâta d'y installer une lunette méridienne de 2m50 de distance focale avec une excellente pendule vérifiée par Graham. Pour la mesure des distances zénithales il eut un quart de cercle construit par un habile artiste anglais, Bird, (on croyait à cette époque qu'il était avantageux de donner une grande dimension aux rayons des arcs divisés sauf à ne prendre qu'une certaine fraction de la circonférence.

Bradley commença, en 1750, et poursuivit jour et nuit, pendant 12 ans, un admirable cours d'observations régulières des étoiles, de la Lune et des planètes. L'astronome a besoin pour fonder ses théories, des observations anciennes tout autant que des nouvelles. L'initiative prise par Bradley a donc assuré à l'Angleterre l'avantage de fournir à la science l'une de ses bases. (1)

Louis de La Caille (1713-1762) est cité par Lalande (astronomie, n° 544) comme ayant fait à lui seul plus d'observations et de calculs que tous les astronomes de l'Europe qui ont vécu de son temps, pris ensemble. Son grand titre de gloire est d'avoir le premier exploré le Ciel austral pendant son séjour au Cap de Bonne-Espérance de 1750 à 1752. Il amassa dans ce court intervalle de temps des observations pour les parallaxes de la Lune, de Venus et de Mars, l'étude de la réfraction, mesura un arc de méridien, détermina la longueur du pendule à seconde, fixa les positions précises de 1000 étoiles et des principales étoiles du Ciel austral.

---

(1) Le Verrier, annales de l'Observatoire de Paris, t. I. page 11.

C'est à lui que l'on doit les noms adoptés pour les Constellations. A son retour en France, La Caille reprit possession d'un petit observatoire dans le Collège Mazarin où il était professeur de mathématiques. Jusqu'à sa mort il montra une telle persévérance. Malheureusement pour la science il n'eut à sa disposition que des moyens de travail trop limités (Biot, Journal des savants 1847)

2 _ Mouvements propres des étoiles _ Translation du système solaire. Les observations de Bradley et de La Caille calculées avec grand soin, ont conduit lorsqu'on les a comparées aux observations plus récentes, à reconnaître que les coordonnées des étoiles, d'une manière générale, ne sont pas absolument invariables; en d'autres termes que les étoiles ont des mouvements propres. Une étoile renfermée dans le Catalogue de Groombridge et qui a le N° 1830, a un mouvement propre de 7" par an.

Les mouvements propres des étoiles n'ont rien de surprenant quand on étend à tous les astres la loi de la gravitation de Newton.

Comme le Soleil est comparable à une étoile, il est probable qu'il a un mouvement propre. S'il en est ainsi les mouvements propres des étoiles supposés distribués au hasard comme des erreurs accidentelles doivent en apparence, être plus nombreux dans la direction opposée à celle de la vitesse du Soleil; puisque les mouvements propres apparents, résultent de la composition du mouvement propre de chaque étoile avec le mouvement égal et contraire à celui du Soleil. C'est ainsi que William Herschel (1738_1822) Voir la notice d'Arago sur William Herschel dans l'annuaire du Bureau des Longitudes pour 1842, le plus grand astronome observateur moderne, a pu estimer (1783) le mouvement de translation du système solaire, déjà pressenti par Bradley et Lambert (Cosmologische Briefe, 1761).

Le Soleil se dirige vers un point voisin de Wega (α Lyre) avec une vitesse comparable à celle de la Terre dans son orbite autour du Soleil (Voir dans l'annuaire du Bureau des Longitudes pour 1897 la Notice de Tisserand sur le mouvement propre du système solaire)

Quant à la valeur de cette vitesse on peut l'obtenir par la mesure de la vitesse de la vitesse des étoiles suivant le rayon visuel, à l'aide du spectroscope, comme il sera expliqué dans le chapitre suivant.

En toute rigueur, puisque le Soleil se meut, il faudrait d'après les principes du mouvement relatif, appliquer aux planètes, pour l'étude de leur mouvement relatif autour du Soleil, une force égale et contraire à celle qui produit l'accélération dans le mouvement du Soleil, les axes étant supposés se déplacer parallèlement à eux-mêmes. Jusqu'à présent, il ne paraît pas nécessaire d'admettre autre chose qu'une vitesse de translation rectiligne et uniforme. Par suite, il n'y a pas lieu de tenir compte des forces apparentes dans le mouvement relatif.

La théorie de l'aberration a été établie par Bradley avant la découverte du mouvement de translation du Soleil. Y a-t-il des changements à lui apporter ?

Il faut composer la vitesse de la lumière V avec une vitesse égale et contraire à la résultante des deux vitesses.

- u vitesse de translation du Soleil supposée rectiligne et uniforme.
- v vitesse de la Terre dans son orbite relative autour du Soleil.

On peut composer d'abord V et $-u$ ce qui donne une résultante indépendante de la position de la Terre; la direction de cette résultante représente la direction de l'étoile vue du Soleil supposé fixe. Il ne reste plus qu'à composer cette résultante avec la vitesse $-v$.

Il n'en résulte pour la théorie qu'une différence insignifiante.

3.- En cherchant les parallaxes annuelles des étoiles W. Herschel est conduit à la découverte des systèmes d'étoiles doubles.

W. Herschel préoccupé, comme Bradley de la détermination des parallaxes avait relevé dans le Ciel depuis 1779 et Catalogué beaucoup de groupes d'étoiles très rapprochées, non en réalité, pensait-il, mais par le fait d'une communauté des directions des rayons visuels. Il imagina suivant une idée de Galilée, de mesurer avec le micromètre les positions des étoiles de ces groupes qu'on appelle étoiles doubles ou multiples. Durant le cours de l'année, les ellipses parallactiques, de grandeur différente devaient être semblables; il serait facile de faire les mesures sur des images voisines dans le champ de la lunette et de vérifier la théorie de la parallaxe annuelle.

En fait, il arriva que les groupes considérés par Herschel étaient des systèmes d'étoiles voisines les unes des autres et en mouvement relatif les unes par rapport aux autres. Suivant l'idée développée auparavant (1767) par l'Anglais Michell qui prévoyait l'extension à ces systèmes de la loi de Newton. Chacune des deux composantes d'une étoile double doit décrire une ellipse autour de l'autre. W. Herschel après une vingtaine d'années d'étude sur les mouvements dans les étoiles doubles qui sont en général très lents, put prévoir les durées de révolution de quelques systèmes et publia sa découverte (1802).

Savary, en 1827, calcula la première orbite d'une étoile double: ξ Grande Ourse. Depuis lors cette branche d'étude a pris une grande extension.

Quant aux parallaxes annuelles, il ne pouvait rien obtenir; à cause de $\pi = \pi'$, les déplacements parallactiques pour les deux étoiles étaient les mêmes; les mesures relatives ne pouvaient rien donner.

C'est par la comparaison d'observations méridiennes très précises qu'Henderson au Cap parvint d'abord (1833) à mettre hors de doute l'existence de la parallaxe annuelle de l'étoile α de la constellation du Centaure; π fut trouvé égal à 1'' environ; Le résultat ne fut publié qu'en 1839. Quelques mois auparavant Bessel avait fait connaître la parallaxe (0'',35) de 61 Cygne, déduite d'observations avec l'héliomètre, instrument imaginé par Bouguer. C'était une vérification indispensable du système de Copernic. Depuis on a déterminé les parallaxes d'un certain nombre d'étoiles, toutes inférieures à 1''. On s'attaque de préférence aux étoiles ayant un mouvement propre sensible, ce qui donne lieu de supposer qu'elles sont relativement proches du soleil, et on les compare avec le micromètre aux étoiles voisines aux époques où le coëfficient de π (chapitre XIII) est le plus fort. Cette méthode est dans son principe celle de W. Herschel.

4. La connaissance de l'orbite d'une étoile double et de la parallaxe annuelle du système fait connaître la somme des masses des deux étoiles. En effet, a' T' étant le demi grand axe et la durée de la révolution sidérale de l'étoile E' qui joue le rôle de satellite de l'étoile principale E, on a

$$4\pi^2 \frac{a'^3}{T'^2} = f(m+m')$$

en appelant m et m' les masses des deux étoiles E E'.

D'autre part pour la Terre, en négligeant sa masse vis-à-vis de celle du Soleil de masse M, on a

$$4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} = fM.$$

En divisant il vient

$$\frac{m + m'}{M} = \left(\frac{a'}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T'}\right)^2.$$

Soit D la distance du Soleil au système, π la parallaxe annuelle $= \frac{a}{D}$ supposée connue, on a

$$\frac{a'}{a} = \frac{a'}{D} \cdot \frac{D}{a}$$

$\frac{a'}{D}$ se déduit de la connaissance de l'orbite et des mesures micrométriques comme dans le cas des satellites.

Pour T' elle résulte des observations et du calcul de l'orbite.

Voici les nombres obtenus pour quatre groupes dont la distance à la Terre paraît assez bien connue.

Etoiles doubles	Parallaxes annuelles	Somme des masses
α Centaure	0''80	1.8 fois celle du Soleil
η Cassiopée	0,15	8.3 "
70 p Ophiuchus	0,17	2,5 "
o² Eridan	0,22	1,0 "

De ce que les masses des étoiles sont comparables à celles du Soleil, il résulte qu'elles n'ont pas d'action sensible sur les mouvements à l'intérieur du système solaire.

Il n'est pas de nécessité que tous les corps dans les systèmes d'étoiles soient visibles; il peut y avoir des masses cachées pour nous et qui agissent sur les autres par leur attraction pour modifier les mouvements. Bessel a été conduit ainsi à prédire (1844) l'existence d'un Compagnon pour Sirius, que l'observation a révélé depuis.

5. Étoiles variables d'éclat - Étoiles nouvelles ou temporaires - Amas stellaires - Nébuleuses - Les mesures persévérantes d'Herschel avec des instruments puissants, le conduisirent naturellement à étendre beaucoup ce qu'on savait sur les étoiles(1).

On connaissait une étoile o Baleine appelée Mira dont les variations d'éclat dans la période de 334 jours sont telles qu'elle est invisible pendant 5 mois et comparable à une étoile brillante de 2ième grandeur, pendant 15 jours.

On connaissait encore Algol ou β Persée dont les variations se reproduisent dans la période de 2 jours 21 heures; l'éclat diminue soudainement pendant 3 heures ½ environ; ce qui devait tenir, pensait-on, à l'interposition d'un corps opaque circulant autour de l'étoile, fait démontré tout récemment au moyen du spectroscope.

Dans le cours de ses recherches, W. Herschel a assigné les éclats comparatifs de beaucoup d'étoiles, ce qui a facilité la découverte des variations d'éclat. W. Herschel a noté également les couleurs des étoiles.

Le nom de W. Herschel est surtout attaché aux amas d'étoiles et aux nébuleuses; ses découvertes ont été continuées par son fils John Herschel (1792-1871) qui alla au Cap, comme naguère La Caille, explorer le ciel austral.

Les nébuleuses sont constituées par des groupes d'étoiles ou par des amas de matière de forme irrégulière faisant l'effet de taches dans le ciel. On les nomme nébuleuses résolubles dans le premier cas, dans le second nébuleuses non-résolubles; le spectroscope a depuis montré qu'on avait alors affaire au moins pour une partie de ces nébuleuses, à des masses de gaz illuminé.

W. Herschel et John Herschel ont pu compter un grand nombre d'amas et de nébuleuses; il est aujourd'hui de plusieurs milliers. On a dessiné avec le plus grand soin l'aspect que présentent les plus belles, dans la pensée surtout d'y découvrir avec le temps des changements qui puissent nous révéler les transformations successives de la matière qui, suivant les idées d'Herschel constitue les groupes d'étoiles en se condensant. On a constaté que la forme en spirale était très fréquente pour les nébuleuses.

Notre Soleil lui-même appartient à l'un de ces groupes d'étoiles.

---

(1) Voir le Traité d'Astronomie stellaire de M. Ch. André.

La nébuleuse résoluble, dont il est pour ainsi dire une molécule, est formée par la réunion de toutes les étoiles assez brillantes qui offrent une condensation d'autant plus marquée qu'on se rapproche de la Voie lactée.

On a entrepris (MM. Bigourdan, à l'observatoire de Paris, Javelle à l'observatoire de Nice) depuis un certain nombre d'années, des déterminations précises des coordonnées des nébuleuses. Avec le temps, les mouvements propres seront mis en évidence, et peut être aussi leurs parallaxes.

Contrairement à l'opinion d'Herschel qui les croyait incomparablement plus distantes des étoiles que celles-ci du Soleil, il paraît très probable que les deux classes de corps ne se distinguent pas par leur éloignement.

6. Structure de l'Univers. Hypothèse de la nébuleuse solaire.

Suivant les idées d'Herschel, les nébuleuses sont la matière première qui, en se condensant par places, a formé les groupes d'étoiles. Cette idée de la condensation progressive des nébuleuses est le point de départ de l'hypothèse célèbre que Laplace a proposée pour expliquer les circonstances caractéristiques présentées par les planètes du système solaire: leurs orbites presque circulaires, la coïncidence très approchée des plans de leurs orbites.

L'atmosphère du Soleil a dû primitivement s'étendre au delà des orbites de toutes les planètes, et elle s'est resserrée successivement jusqu'à ses limites actuelles. Le Soleil était primitivement, pour Laplace, une nébuleuse à condensation centrale animée d'un lent mouvement de rotation.

Par l'effet du refroidissement et de la contraction de la nébuleuse solaire, la vitesse angulaire du mouvement de rotation doit augmenter; car en vertu du principe des aires, la somme des aires décrites par le rayon vecteur de chaque molécule du soleil projetées sur le plan de son équateur doit être toujours la même. La force centrifuge due au mouvement de rotation s'accroît, de manière à atteindre la valeur de l'attraction de la masse sur une molécule placée à la surface. A ce moment, la nébuleuse doit abandonner une partie de sa matière qui s'écoule principalement près de l'équateur là où la force centrifuge l'emporte.

Les zones de vapeurs successivement abandonnées doivent former des anneaux concentriques circulant autour du Soleil.

Ce sont les anneaux ainsi formés qui, rompus en un ou plusieurs de leurs points par la moindre cause accidentelle, dont il serait facile, pense Le Verrier[1], de trouver une origine, auraient ensuite donné naissance aux planètes en se constituant par l'attraction de chacune de leurs parties en sphères circulant autour du corps central et douées d'un mouvement de rotation.

Laplace cite les anneaux de Saturne comme une preuve toujours subsistante de l'extension primitive de l'atmosphère de la planète.

L'hypothèse de Laplace a été critiquée dans les détails (Faye, Sur l'origine du Monde); mais elle paraît avoir une grande part de vérité comme vue d'ensemble.

7. Étude détaillée du système solaire. Grâce à des instruments puissants, construits et combinés par lui, Herschel a fait aussi de nombreuses découvertes dans le système solaire.

En 1781, découverte d'Uranus et en 1787 de deux satellites de cette planète;

En 1789, grâce à un télescope de 40 pieds, découverte de deux satellites intérieurs de Saturne; détermination en 1794 de la période de rotation de la planète.

En 1800, la découverte de l'existence de rayons calorifiques dans le spectre solaire prélude aux conquêtes de l'astronomie physique.

Grâce sans doute à l'impulsion d'Herschel, l'exploration du ciel poursuivie avec plus d'ardeur et avec des instruments plus puissants ne tarda pas à nous révéler toute une famille, devenue aujourd'hui très nombreuse, de petits corps, nommés par Herschel lui-même astéroïdes, et circulant dans le grand espace libre compris entre Mars et Jupiter.

8. Petites planètes ou astéroïdes. La première petite planète fut découverte le 1er Janvier 1801, par Piazzi, à Palerme; elle porte le nom de Cérès. En 1802, Pallas fut trouvée par Olbers qui imagina que ces petits corps pouvaient provenir de l'explosion d'une grosse planète. Pour faciliter les découvertes on dut par la suite construire des cartes détaillées indiquant les petites étoiles de la région zodiacale.

---

(1) Annales de l'observatoire de Paris, t. I. p. 30.

Ces cartes ont joué un rôle important, comme on l'a dit, lors de la découverte de Neptune. Plus récemment la difficulté de la construction de ces cartes, par les moyens ordinaires, dans le voisinage de la Voie lactée, a amené l'intervention des procédés photographiques, auxquels on doit aujourd'hui exclusivement les découvertes de nouvelles planètes (Max Wolf à Heidelberg, Charlois à Nice).

On en a découvert 463 du 1er janvier 1801 à la fin de 1900. Ce nombre considérable permet de faire des relevés statistiques intéressants et aussi des rapprochements avec une classe d'autres corps, les comètes dont on va parler. Dans l'ensemble les petites planètes ont des orbites peu excentriques avec une inclinaison modérée sur le plan de l'écliptique.

Les petites planètes qui se rapprochent de la Terre (Eros) sont utiles en vue de la détermination de la parallaxe. Celles qui se rapprochent de Jupiter éprouvent des perturbations sensibles d'où il est possible de déduire la masse de la grosse planète.

L'obligation où les astronomes se trouvent de prévoir la position qu'elles occuperont dans le ciel, après un intervalle de plus d'une année, d'une opposition à l'autre, exige le calcul de l'orbite que Gauss a enseigné à calculer dans son Ouvrage déjà cité (Chap. XXIII)

A cause de la faiblesse de ces petits astres, il a fallu aussi développer et perfectionner les méthodes d'observation. (Voir dans l'annuaire du Bureau des Longitudes pour 1891, la Notice de F. Tisserand sur les petites planètes).

9\. Généralités sur les Comètes. On découvre parfois dans le ciel des astres mobiles ayant l'apparence des nébuleuses, les comètes, qui se déplacent dans des orbites en général sensiblement paraboliques ayant le Soleil pour foyer.

Newton ayant démontré (Chapitre X, N° 4) qu'une section conique quelconque peut être décrite en vertu de l'attraction du Soleil aperçut de suite l'application aux comètes; il étendit la loi de gravitation à ces corps et donna le premier les moyens de calculer les éléments de leurs orbites d'après les coordonnées observées recueillies pendant la période de visibilité.

On connait les éléments des orbites de plusieurs centaines de comètes. Le relevé des éléments montre que, si quelques

unes ont une excentricité légèrement supérieure à l'unité (qui peut tenir aux perturbations des planètes), dans l'ensemble elles présentent des orbites elliptiques très allongées. Cela peut s'interpréter en disant que les comètes sont constituées par des matériaux appartenant dès l'origine à la nébuleuse solaire. En effet, l'expression de la vitesse étant donnée par la formule générale

$$V^2 = f\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

pour une orbite très allongée a est très grand et V devient très petit pour les grandes distances r au Soleil ; c'est-à-dire que les matériaux de la comète sont alors presque en repos relatif.

Il est remarquable que les comètes, à l'inverse des planètes, présentent toutes les inclinaisons possibles sur le plan de l'écliptique.

Il y a toutefois une classe de comètes, qui tend à s'augmenter, à orbites assez resserrées et par suite d'une durée de révolution assez courte. Ainsi il y a une trentaine de comètes associées en quelque façon à Jupiter, présentant les caractères communs d'aphélies peu éloignés de la région dans laquelle circule Jupiter et de faibles inclinaisons sur l'écliptique.

Pour concevoir comment une comète arrivant avec une vitesse sensiblement parabolique peut être obligée de se mouvoir dans une orbite elliptique, reprenons les équations différentielles du mouvement troublé, supposons que cette comète passe dans le voisinage d'une des planètes principales Jupiter par exemple ; si elle passe assez près, il pourra arriver que le terme $f\,m'\,\frac{x'-x}{\Delta^3}$ provenant de l'attraction de Jupiter l'emporte de beaucoup sur le terme $\frac{f\mu x}{r^3}$ provenant de l'attraction du Soleil, et que la comète obéisse presque exclusivement à l'attraction de Jupiter. Suivant les cas, à la suite de la forte perturbation de Jupiter, la vitesse primitive parabolique pourra être augmentée ou diminuée ; si elle est diminuée, l'orbite sera nécessairement une ellipse, puisque l'on a toujours

$$V^2 = f\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

et que par hypothèse la vitesse est devenue moindre que la vitesse parabolique correspondant à

$$V^2 = f\mu\,\frac{2}{r}.$$

Un certain nombre de comètes périodiques doivent sans doute leur origine à leur capture par une grosse planète.

10. Indications sur quelques comètes. _ La plus célèbre des comètes est celle de Halley. L'intervalle entre les apparitions successives est de 76 ans. Halley calcula les éléments de l'orbite de la comète lors de son passage au périhélie, en 1682, admit qu'elle était identique avec d'autres comètes parues en 1531 et 1607 et prédit son retour vers l'année 1759. Plus tard Clairaut calcula les circonstances de ce retour en tenant compte des perturbations de Jupiter et de Saturne sur la comète. c'était la première fois qu'on calculait les perturbations d'une comète; il trouva que l'instant du passage au périhélie serait retardé de 100 jours par l'action de Saturne, de 518 au moins par l'action de Jupiter, ce qui se trouva confirmé par l'observation.

Il faut aussi mentionner la comète d'Encke (durée de révolution 1200 jours) du nom de l'astronome qui en a calculé les perturbations et a reconnu le premier exemple d'une variation progressive de la durée de révolution d'une comète (2 heures environ d'une révolution à l'autre).

De la troisième loi de Képler

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \text{Constante}$$

il résulterait que le grand axe irait en diminuant; à la longue la comète tomberait sur le soleil. Pour expliquer cette anomalie, Encke a introduit l'hypothèse d'un milieu résistant dont la densité diminuerait rapidement à partir du soleil. L'astronome russe Backlund a publié le résultat de longs calculs sur cette comète; il a trouvé que la diminution de la durée de révolution ne se maintenait pas constante: l'anomalie devient encore plus difficile à expliquer.

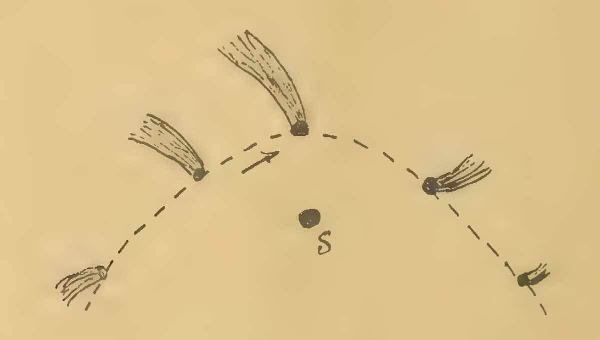
La Comète de Biela, qui n'existe plus, a eu une histoire très intéressante. Elle a été découverte en 1826. Son orbite resserrée correspond à une période de 6 ans, 6; elle passe très près de l'orbite de la Terre. En 1832, au retour suivant, elle croisa l'orbite un mois avant le passage de la Terre. En 1839, on ne put l'observer, mais en 1846, elle se montra comme dédoublée en deux noyaux qui s'écartèrent lentement et furent revus en 1852, après quoi on ne trouva plus trace de la comète.

Sans doute elle s'est désagrégée. La désagrégation des comètes s'explique très facilement en se rapportant à ce qui a été dit de la force perturbatrice du Soleil dans le mouvement de la Lune (Chapitre XI, n° 6). Les Comètes ont une grande étendue, avec une densité si faible que le mouvement des satellites de Jupiter n'a pas été troublé par le passage de comètes à travers ce système. Il suffit que la force perturbatrice d'une planète l'emporte sur la cohésion des matériaux de la Comète : celle-ci doit se dissoudre ou se désagréger.

Dans la nuit du 27 Novembre 1872, comme la terre croisait l'orbite de la comète perdue, elle rencontra un magnifique essaim d'étoiles filantes ; une autre pluie encore plus abondante eut lieu en 1885 et 1892.

Il est à remarquer que la désagrégation d'une comète en fragments, à cause de l'action du Soleil au périhélie ou des perturbations des planètes peut donner naissance à des familles d'orbites nombreuses, telles que les comètes périodiques, généralement très petites.

11. Particularités physiques des Comètes. – Elles augmentent d'éclat quand elles approchent du Soleil, une chevelure ou queue tend à se montrer à l'opposé du soleil ayant parfois une longueur considérable comme dans le cas de la Comète de Donati en 1858.



Le rapprochement des différentes formes de chevelure et de la nature des matériaux révélée par le spectroscope a conduit l'Astronome russe Bredikhine à distinguer trois types ; la répulsion apparente serait d'autant plus nette que les matériaux (hydrogène, gaz carboné, vapeurs de fer et de sodium) sont plus légers.

Les comètes brillent à cause de la lumière du Soleil qu'elles réfléchissent, mais elles sont lumineuses aussi par elles-mêmes, sans qu'on sache au juste l'origine de cette lumière.

Ce qui est bien démontré par les observations récentes (visuelles ou photographiques), c'est que des changements surviennent dans la constitution de ces astres avec une rapidité non soupçonnée, auparavant.

D'après l'Astronome américain Bernard, l'apparence physique d'une comète périodique est assez caractéristique pour qu'on puisse affirmer la périodicité avant de calculer l'orbite.

12. Etoiles filantes et bolides, leur origine cosmique. A différentes époques de l'année, en particulier vers le 10 Août et vers le 14 Novembre et à la fin de ce mois, il y a des étoiles filantes assez nombreuses paraissant venir de points du Ciel situés l'un dans la constellation de Persée, l'autre dans la constellation du Lion, le dernier dans celle d'Andromède, d'où les noms de Perséides, de Léonides et d'Andromédides donnés aux systèmes de météores.

On interprète les phénomènes en considérant un système de particules se mouvant parallèlement et rencontrant la terre: les particules deviennent lumineuses en arrivant dans l'atmosphère, sans doute à cause de leur grande vitesse relative et de la résistance de l'air. Les plans menés par les trajectoires parallèles et l'œil de l'observateur passent par une même droite qui perce la sphère céleste au point qui apparait comme le centre de la radiation et qu'on appelle le point radiant. La position de ce point fait connaitre la direction de la vitesse relative de l'essaim par rapport à la terre supposée fixe.

Pendant longtemps, on avait cru, comme avant Tycho-Brahé pour les comètes, que les étoiles filantes et les météores plus gros appelés bolides prenaient naissance dans les régions supérieures de l'atmosphère. Un astronome américain M. Newton et Mr Schiaparelli, de Milan, sont les auteurs principaux de la théorie astronomique des étoiles filantes.

Schiaparelli admettant que les étoiles filantes circulent dans des orbites à peu près paraboliques, a calculé, ce qui est fort simple, les éléments de l'orbite des Perséides et constaté qu'ils

se mouvaient dans le même orbite qu'une comète parue en 1862.

Peu de temps après, on constata que les Léonides se mouvaient dans l'orbite de la Comète 1866 I d'où l'idée de la parenté des comètes et des étoiles filantes qui proviendraient de la désagrégation de celles-ci. Les Léonides paraissent maintenant presque épuisés.

On connait aujourd'hui plusieurs milliers d'essaims, dont chaque membre peut être considéré comme une comète minuscule.

C'est un nouveau monde planétaire, écrivait autrefois Arago, qui commence de se révéler à nous.

Les étoiles filantes très brillantes portent le nom de bolides et on appelle aérolithes les bolides qui tombent sur la terre, et donnent lieu parfois à des explosions. Les observations même grossières de ces corps offrent un réel intérêt. Quand ils ont été observés en différents points, il devient possible de déterminer leur trajectoire, ce qui offre plus de difficulté dans le cas des étoiles filantes ordinaires.

13. Rapprochements entre les petites planètes, les comètes et les étoiles filantes.

Les découvertes des dernières années ont mis en évidence des rapprochements non soupçonnés autrefois.

Ainsi, il n'y a pas de différence essentielle entre les petites planètes et les comètes périodiques, on peut citer des comètes à courte période ayant des éléments tout-à-fait comparables à ceux de petites planètes :

	a	e	i
(33)	2,87	0,34	1°,9
(175)	3,51	0,35	3,8
(475)	2,59	0,38	18,6
Comète Tempel	3,49	0,40	10,8
Comète Holmes (1892)	3,62	0,41	20,8

Il est digne de remarque que la comète Holmes a présenté successivement l'apparence d'une nébuleuse et d'une étoile, comparable à une petite planète.

Laplace avait été amené autrefois à voir une sorte d'opposition entre les planètes liées en quelque sorte à l'écliptique et les comètes, dont les orbites sont indifférents à l'égard de ce plan. Les planètes appartenant au système solaire, Laplace avait comparé, après Herschel, les comètes à des astres, à des nébuleuses errant de système en système attirés par le Soleil ou, dans certains cas, par l'une des planètes principales.

On vient de voir qu'il n'existe pas d'opposition brusque entre les deux classes de corps. D'autre part, la formule

$V^2 = f\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$ devrait donner pour $r = \infty$ la valeur de la vitesse de translation du système solaire; $\frac{1}{a}$ serait négatif, les orbites des comètes seraient fortement hyperboliques et on n'en rencontre pas de telles.

C'est une question de savoir s'il y a continuité entre l'ensemble des comètes et les classes de comètes périodiques. Dans plusieurs cas on a pu expliquer l'existence d'une comète périodique, non aperçue auparavant, en faisant intervenir la capture par une grosse planète, d'une comète presque parabolique. Cependant une telle explication ne serait pas valable pour tous les cas, et il faut tenir compte de l'opposition des apparences physiques signalée par Barnard entre les comètes périodiques et les autres.

La liaison des étoiles filantes avec les Comètes est certaine au moins dans quatre cas; affirmer cette liaison comme générale et nécessaire serait une conclusion trop hâtive.

H.-A. Newton a démontré d'autre part que les aerolithes suffisamment bien observés constituaient pour la majorité, une famille de corps ayant des affinités avec les comètes périodiques. Mais on ne peut nier aussi le caractère nettement hyperbolique d'un assez grand nombre d'orbites de bolides.

Rien d'étonnant à ce que plusieurs familles de corps se trouvent en quelque sorte mélangées.

Consulter la Notice - Etoiles filantes et Comètes dans l'Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1883.

14_ Variation des latitudes_ Pendant longtemps on a cru que l'axe de rotation de la Terre était lié invariablement au globe, les variations possibles dans les déterminations de latitude d'une station étant de l'ordre des erreurs d'observation.

On a aujourd'hui, grâce aux progrès accomplis dans l'art de l'observation, des preuves indéniables de petits changements périodiques dans les latitudes. D'après la discussion de l'ensemble des observations précises depuis 1750, l'américain Chandler a trouvé que le mouvement du pôle résulte de deux mouvements, l'un annuel sur un cercle d'environ 7 mètres de diamètre, l'autre dans une période d'environ 428 jours sur un ovale d'environ 10 mètres de long, de largeur et de position variables. Les deux mouvements se font dans le sens direct autour du pôle moyen.

Les déplacements qui sont de l'ordre de 0",3 et 0",2 demeuraient il y a peu d'années (avant 1888) comme inappréciables.

Chapitre XXV.

Développement des méthodes d'observation. Progrès dus à l'emploi de la Photographie et du Spectroscope. Constitution physique du Soleil.

1. Développement des Méthodes d'observation. Premiers travaux d'Arago en Astronomie physique.

On peut distinguer avec M. Faye (Voir l'introduction du t. II) plusieurs époques dans l'histoire de l'Astronomie. La Géométrie intervient seule jusqu'à Newton. Alors le principe de la gravitation apparaît comme le régulateur de tous les mouvements dans le système solaire. La nécessité de mettre d'accord la théorie et les observations cause des progrès incessants aussi bien dans les méthodes de calcul que dans l'art d'observer. Arrive Herschel qui porte ses regards au delà du système solaire et étudie avec des télescopes gigantesques non seulement le Soleil avec ses taches, la nature de son rayonnement, les surfaces de la Lune et des planètes, leurs mouvements de rotation, mais encore les étoiles, les nébuleuses et l'Univers dans son ensemble. L'exploration du Ciel reprend ses droits vis-à-vis de la théorie. On construit des instruments de plus en plus puissants avec lesquels il devient possible d'aborder l'étude complexe des rayons lumineux qui nous viennent des astres. Le rayon lumineux n'est plus une ligne géométrique, mais un ensemble de radiations distinguées pour la première fois par Newton, et comprenant à la fois des radiations lumineuses, calorifiques et chimiques. Il devient nécessaire de faire appel à la Physique et à la Chimie. Une nouvelle branche de l'Astronomie, l'Astronomie physique, prend naissance et se développe, sans que les branches plus anciennes perdent de leur importance, témoin l'importante découverte de la variation des latitudes, mise en évidence malgré sa petitesse, grâce à la précision des mesures actuelles. Arago fut un initiateur en Astronomie Physique.(1)

(1) Voir les discours prononcés à l'inauguration de la Statue d'Arago. dans l'annuaire du Bureau des Longitudes, pour 1894.

Le polariscope lui montra que la lumière de la Comète de Halley contient de la lumière polarisée; c'était la lumière du Soleil réfléchie par les particules de la comète.

L'emploi des prismes bi-réfringants ou à double image lui fournit des moyens très précis pour la mesure des diamètres des planètes.

Il imagina les premiers photomètres pour mesurer les éclats relatifs des astres.

Il avait deviné que les étoiles filantes n'étaient pas des météores engendrés au hasard dans l'atmosphère mais les représentants d'une nouvelle famille de corps comparables à des comètes minuscules, comme l'a montré depuis Schiaparelli.

Enfin Arago avait pressenti l'importance future des applications de la Photographie à l'étude des astres.

2. Importance des procédés photographiques. Carte céleste internationale. La photographie astronomique doit surtout ses succès à l'avantage que présente la plaque de gélatine sèche. Comparée à l'œil, la plaque photographique possède cette propriété de devenir sensible à une impression lumineuse très faible à condition que l'impression se prolonge pendant un temps suffisant; que la durée de pose soit assez longue. Cette propriété n'appartient pas à l'œil à un égal degré; il est très sensible aux radiations lumineuses; mais elles ne s'ajoutent pas les unes aux autres dans l'œil, comme il arrive pour la plaque photographique.

En revanche, l'œil reprend l'avantage pour apprécier les petites variations de lumière et pour étudier les détails des images (par exemple les bandes de Jupiter et les canaux de Mars): car la plaque photographique a un grain qui est même d'autant plus gros qu'elle est plus sensible.

La photographie peut rendre service aux Astronomes dans deux ordres de travaux.

Elle leur permet, dans le temps relativement court d'une simple pose, d'enregistrer, avec grande exactitude, les positions relatives de centaines, de milliers d'étoiles; les taches et les facules du Soleil ou les petits détails de nébuleuses et d'autres objets: ou les phénomènes passagers d'une éclipse.

Elle leur permet de découvrir les astres mobiles (petites planètes comètes ou même météores) qui, dans des conditions convenables, laissent une trace sur la plaque; de déterminer les parallaxes stellaires par la comparaison de clichés pris à six mois d'intervalle aux époques favorables (Chapitre XIII, n° 2).

Parmi les travaux de cet ordre, une mention spéciale appartient à la carte photographique de l'ensemble du ciel, décidée par le Comité international qui s'est réuni en 1887, à l'observatoire de Paris, sur l'initiative de l'Amiral Mouchez, alors Directeur.(1)

MM. Paul et Prosper Henry, astronomes à l'observatoire de Paris, avaient commencé en 1871 un grand travail de Cartographie céleste consistant à fixer, par des déterminations approchées, les positions de toutes les étoiles de la zône zodiacale. Le travail devenant trop difficile à l'approche de la Voie lactée, à cause du nombre croissant des étoiles, ils prirent le parti de recourir à la photographie. Habiles opticiens, ils taillèrent eux-mêmes un objectif de 0m16 d'ouverture, achromatisé pour deux radiations voisines de G; puis, la réussite ayant été complète, un second objectif de 0m33 d'ouverture fut taillé et un équatorial photographique fut construit, qui est devenu le type adopté par le Comité international pour exécuter les Cartes célestes. Plus de la moitié des instruments ont été construits pour les différents pays par les artistes français.

Le Comité international décida:

1° qu'il serait fait une première série de clichés à courte pose, devant contenir toutes les étoiles jusqu'à la 11ième grandeur, dont le nombre à prévoir est de 1.500.000, et qui, fournissant les éléments d'un Catalogue de haute précision, serait appelée à devenir le fondement de l'Astronomie future.

Ce premier travail paraît devoir exiger une vingtaine d'années (photographies, mesures des clichés, calculs....) et remplira une cinquantaine de volumes in folio.

2° qu'une seconde série de clichés à longue pose donnerait les étoiles jusqu'à la 14ième grandeur inclusivement, c'est-à-dire permettrait d'atteindre un ordre de grandeur un peu supérieur à celui des plus faibles étoiles des cartes écliptiques. Le nombre des étoiles à prévoir pour cette série est de 23 millions

La première série est en voie de progrès.

Les observateurs qui s'occupent de la photographie du Ciel sont, en France, ceux de Paris, Bordeaux, Toulouse et Alger.

A l'étranger, en Angleterre et en Amérique surtout la photographie astronomique est l'objet d'une attraction spéciale.

---

(1) Voir la notice publiée par l'Amiral Mouchez dans l'annuaire du Bureau des Longitudes pour 1887.

En second lieu, la Photographie enregistre les radiations ayant des longueurs d'onde qui sont soit trop petites soit trop grandes pour être perçues par l'œil; elle révèle les régions infra rouge et ultra-violette du spectre qui, sans elle, seraient demeurées inconnues.

L'impression photographique, faible pour les rayons les plus brillants du spectre, devient très intense dans les parties bleu et violette pour lesquelles l'œil perd presque toute son acuité visuelle; elle se prolonge même bien au delà du violet, région pour laquelle la rétine devient absolument insensible.

L'étendue du spectre observable se trouve ainsi à peu près doublée, et cette prolongation a lieu justement dans une région où les radiations sont dispersées par les prismes suivant une loi très rapide; les déplacements se trouvent ainsi amplifiés, condition très favorable à la précision des mesures.(1)

C'est à ces circonstances qu'il faut rapporter le succès des recherches poursuivies simultanément par M. Hale à Chicago, et M. Deslandres, à Paris, sur l'atmosphère du Soleil et dont nous aurons à parler.

On peut apprécier d'après les mêmes raisons, la valeur de l'entreprise de M. E. C. Pickering, directeur de l'observatoire de Cambridge, (Etats-Unis); d'obtenir par la photographie les spectres de toutes les étoiles du Ciel (en mettant un prisme devant l'objectif de la lunette photographique). Afin d'embrasser les deux hémisphères, un observatoire temporaire a été établi sur une montagne du Pérou, dans l'hémisphère austral.

Les spectres relevés sur les clichés ont été classés d'après les raies, les caractères des spectres ..., la division des spectres en trois types, indiquée dans le cours de Physique, a dû être étendue et complétée.

Un Catalogue de spectres, conclusion des recherches a été publié.

Les deux observatoires américains dont on a parlé ont un programme encore plus vaste; la photographie complète du Ciel indépendamment du Comité international, n'en forme qu'une partie. M. E. Pickering a réussi à établir un service continu de photographie de l'ensemble du Ciel, à des intervalles resserrés (un mois par exemple) pour que rien ne passe inaperçu.

Il devient désormais possible aux astronomes d'aborder des recherches d'ensemble sur la constitution et les mouvements de l'univers stellaire. On va voir quel secours leur prête en même temps le spectroscope.

---

(1) Cornu. Notice sur la méthode de Döppler-Fizeau. Annuaire du bureau des Longitudes pour 1891.

3. Analyse spectrale. Le spectroscope comme moyen de déterminer la Constitution des Corps célestes.

On rappelle d'abord les principes de l'Analyse spectrale.

Les gaz rendus incandescents et sous une faible pression ont un spectre discontinu formé de raies fines brillantes caractéristiques, qui définissent complètement les gaz dont il s'agit. Les solides et les liquides incandescents et les gaz sous une très forte pression ont une lumière en général beaucoup plus intense dont le spectre est continu. Si la lumière intense à spectre continu traverse un gaz incandescent, les radiations simples caractéristiques de ce dernier son absorbées, et les raies apparaissent noires sur un fond brillant. C'est ainsi que le spectre du Soleil, d'après les travaux classiques de Kirchoff, en 1864, présentant un fond continu sillonné de nombreuses raies noires, dont les positions s'accordent avec les raies brillantes d'éléments terrestres (hydrogène, sodium, calcium, fer..) on peut conclure à l'existence de ces mêmes éléments dans le Soleil.

Un nombre assez grand de coïncidences de raies, indique avec une grande probabilité la présence d'éléments identiques dans les sources lumineuses que l'on compare; mais pour éviter les erreurs, il faut avoir une connaissance précise aussi étendue que possible des raies des spectres des éléments, et s'assurer de la réalité des coïncidences en employant une dispersion suffisante.

4. Historique du spectre de l'hydrogène. Angström, qui a confirmé et étendu les observations et les mesures de Kirchoff, trouvait 4 raies dans le spectre solaire appartenant à l'hydrogène: C, F', G', h.

M. Huggins, en Angleterre, a pu ajouter 10 raies ultra-violettes nouvelles en photographiant le spectre de Vega (Lyre) (1879). Vega rentre dans la Catégorie des étoiles blanches dont les spectres renferment les raies de l'hydrogène.

En 1886, grâce à des précautions minutieuses et spécialement par un lavage répété avec de l'ozone, M. Cornu a réussi à obtenir des tubes à hydrogène ne contenant plus que des traces d'impuretés, où tout autre spectre s'efface devant les véritables raies de l'hydrogène; celles-là même que M. Huggins a reconnues dans les spectres des étoiles blanches.

Vers cette époque, M. Balmer a indiqué une fonction simple de l'indice ou rang des raies qui représente exactement les longueurs d'onde des raies successives.

En désignant par m l'ordre d'une raie, comptée vers le violet à partir de la raie C, qui sera considérée comme la première, la longueur d'onde correspondante est donnée par la formule

$$\lambda = 364^{\mu\mu},54 \frac{(2+m)^2}{(2+m)^2-4}$$

Raies	m	λ observé	λ calculé
C	1	$656^{\mu\mu},18$	$656^{\mu\mu},18$
F	2	486 ,06	486 ,06
G	3	433 ,95	433 ,98
h	4	410 ,12	410 ,11
H'	5	396 ,92	396 ,95
α	6	388 ,81	388 ,84
β	7	383 ,49	383 ,48
γ	8	379 ,73	379 ,73
δ	9	376 ,99	377 ,00
ε	10	375 ,02	374 ,96
ζ	11	373 ,41	373 ,38
η	12	372 ,11	372 ,14
θ	13	371 ,12	371 ,14

Enfin, le 4 Mai 1892, M. Deslandres a photographié le spectre d'une protubérance extraordinairement intense. L'épreuve a montré outre les 10 raies ultra-violettes de l'hydrogène, découvertes par M. Huggins, cinq raies nouvelles suivant si régulièrement les précédentes et cadrant si bien avec la formule de Balmer que l'on est conduit à rapporter aussi ces raies à l'hydrogène: la précision des mesures actuelles de longueurs d'onde est très grande, et l'on doit observer que la loi ci-dessus est d'autant mieux vérifiée que les mesures sont plus précises.

On remarquera que le Soleil a révélé la majeure partie des raies de l'hydrogène.

Le fait de la succession des raies spectrales par séries a été confirmé et généralisé par des recherches récentes (Pickering, Kayser et Runge).

5. Le spectroscope comme moyen de déterminer la vitesse des astres dans la direction du rayon visuel ou vitesse radiale. Méthode Döppler-Fizeau.[1]

Considérons une source fixe d'ondulations dont les pulsations se propagent avec une certaine vitesse; un observateur également fixe, recevra un nombre de pulsations égal à celui qu'émet la source dans le même temps; ce nombre caractérise la hauteur du son si la source vibrante est sonore; la couleur de la lumière si elle est lumineuse.

Supposons maintenant l'observateur en mouvement, par exemple s'éloignant de la source, c'est-à-dire marchant dans le même sens que la propagation des ondes : celui-ci recevra dans l'unité de temps un nombre moindre de pulsations que la source n'en émet, puisqu'il marche dans le même sens que les ondulations; il n'en recevrait même aucune s'il marchait avec la même vitesse qu'elles. D'où il résulte, que l'observateur, en s'éloignant de la source sonore, percevra un son plus grave que celui de la source, car l'échelle des sons de l'aigu au grave est caractérisée par la diminution du nombre des vibrations dans l'unité de temps; dans le cas d'une source lumineuse blanche, l'observateur percevra une lumière plus rouge, la gamme des couleurs spectrales du violet au rouge correspondant à celles des sons de l'aigu au grave.

Inversement si l'observateur se rapproche de la source, c'est-à-dire marche à la rencontre des ondes émises, le nombre des pulsations reçues dans l'unité de temps sera plus grand : le son paraîtra donc plus aigu ou la lumière plus violette.

On voit que c'est le mouvement relatif de la source par rapport à l'observateur supposé fixe qui joue seul un rôle.

Buys-Ballot a vérifié en 1875 les idées précédentes dues à Doppler (1803-1853) et publiées en 1842. Dans un wagon ouvert, marchant entre Utrecht et Maarsen, avec des vitesses variant de 5^m à 20^m par seconde, étaient placés des observateurs munis d'instruments de musique; à côté de la voie, se trouvaient de distance en distance des groupes analogues d'observateurs et de musiciens. Chaque groupe pouvait ainsi faire trois observations; la première à l'approche de la source, la seconde au

---

(1) Cornu - Notice sur la Méthode Döppler-Fizeau - Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1891.

moment du passage, la troisième pendant l'éloignement de la source; on estimait dans les trois cas, la hauteur variable des sens perçus. Les vérifications furent aussi satisfaisantes que possible.

6. Interprétation optique du principe de Doppler par Fizeau (1848). Les changements de couleur produits suivant Doppler par le mouvement de la source sont pratiquement insensibles. Au lieu de parler de changement de couleur, il faut avoir égard à la définition de la réfrangibilité d'une onde lumineuse qui ne dépend, toutes choses égales d'ailleurs, que de la période apparente du mouvement vibratoire, et faire intervenir un changement apparent de réfrangibilité, dont l'effet se traduit par un changement de la longueur d'ondulation.

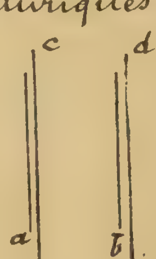
v, étant la vitesse relative de l'observateur, que nous supposerons se rapprocher de la source pour fixer les idées, et V la vitesse de la lumière, les nombres de vibrations émises par la source à l'état de mouvement et de repos, perçues dans le même temps, sont proportionnels aux vitesses $V+v$ et V; l'inverse a lieu pour les longueurs d'onde apparentes λ' et λ; λ' doit être plus petit que λ.

$$\lambda' = \lambda \frac{V}{V+v}$$

Les déplacements des raies ne sont pas d'ailleurs négligeables. Fizeau en assignait les valeurs dans quelques cas.

7. Premières applications à l'Astronomie. Vérifications de la méthode Doppler-Fizeau. Les premières mesures de la vitesse d'approche ou d'éloignement entre la terre et les étoiles ont été communiquées par M. Huggins à la Société Royale de Londres, en 1868.

Une vérification décisive de la Méthode a été faite par Thollon (1880) à l'observatoire de Nice; elle a consisté à projeter alternativement sur la fente du spectroscope le bord oriental et le bord occidental du Soleil et à comparer un groupe de raies solaires a, b à des raies telluriques c d, voisines, qui doivent



rester fixes puisqu'elles sont dues au pouvoir absorbant de l'atmosphère terrestre. Comme le Soleil possède à l'équateur une vitesse d'environ 2 Kilomètres par seconde, le bord occidental se rapproche de l'observateur avec cette vitesse, pendant que le bord oriental s'en éloigne avec la même vitesse; cela fait une différence de 4 Kilomètres. Grâce au système de comparaison imaginé par Thollon, et à la grande dispersion de son spectroscope, le déplacement des raies solaires fut mis en évidence.

Des vérifications nombreuses ont été faites depuis; elles ont porté sur des planètes, des comètes . . . les vitesses obtenues avec le spectroscope ont été d'accord avec les vitesses calculées d'après les éphémérides.

Depuis 1888, la photographie a été utilisée avec succès pour enregistrer les raies spectrales (Vogel). On est arrivé avec le spectrographe à obtenir les vitesses radiales avec une erreur probable de quelques dixièmes de Kilomètres (Campbell)

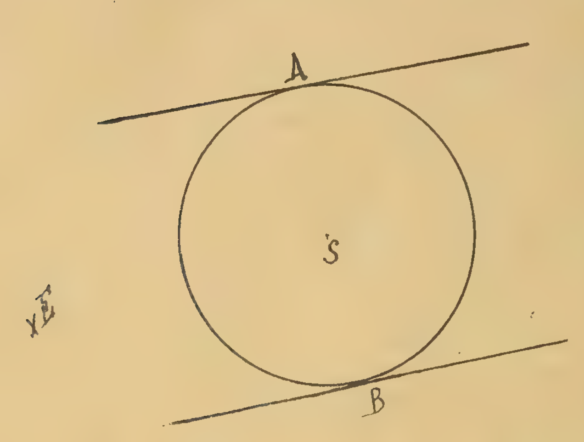
8. Importance astronomique de la mesure des vitesses radiales. La composante du mouvement des astres perpendiculaire au rayon visuel est la seule que peuvent déterminer les mesures faites avec les lunettes. Le spectroscope apporte donc un complément essentiel à ces mesures; et il faut remarquer que les déplacements angulaires dépendent de la distance des astres, tandis que la détermination spectrale de la vitesse radiale en est indépendante. Par suite, si l'on considère un astre dont la loi du mouvement dans son orbite est connue, abstraction faite des dimensions absolues de l'orbite, l'expression de la vitesse radiale étant égalée à la valeur observée, il en résultera la connaissance des éléments absolus de l'orbite.

E E' D S S'

Si l'on a déterminé la vitesse radiale de l'étoile E par rapport au Soleil S, le mouvement propre de l'étoile et la parallaxe annuelle ou la distance D étant supposés connus ainsi que le mouvement de translation de S, l'espace parcouru par l'étoile E dans un temps donné ou sa vitesse peut être évaluée.

Prenons la terre comme exemple pour montrer une application du principe.

Considérons les deux positions A et B de la Terre diamétralement opposées sur son orbite et pour lesquelles la direction de la vitesse passe près d'une étoile brillante située dans l'écliptique.



Soient u et u' les vitesses radiales c'est-à-dire les projections des vitesses de l'étoile et de la Terre sur cette direction, la vitesse de la Terre résultant du mouvement de translation du Soleil et de la vitesse de la Terre dans son orbite relative. La différence des vitesses $u' - u$ sera évidemment le double de la vitesse V de la Terre dans son mouvement relatif autour du Soleil.

De

$$V = \frac{2\pi R}{T}$$

on déduira R, T étant parfaitement connu.

Si l'on considère d'une manière générale un système de corps de masses m, m', m'', .. soumis à leurs attractions mutuelles, comme isolé par rapport aux autres centres d'attraction; et si l'on rapporte le mouvement à des axes de direction fixe passant par le Soleil, on a pour la vitesse V du centre de gravité du système

$$V = \frac{mv + m'v' + m''v'' + ..}{m + m' + m'' + .}$$

Avec des observations assez précises et assez nombreuses, on conçoit la possibilité de déterminer les quantités inconnues qui entrent dans les expressions de V, V'.. ainsi que les masses m, m'...

Notions générales sur la Constitution physique du Soleil.

9. Densité moyenne du Soleil. Sa température. Conservation de sa chaleur. Tout d'abord, il importe, en prenant le Soleil en bloc, de remarquer sa faible densité moyenne, environ le $\frac{1}{4}$ de celle de la terre; elle ne dépasse guère la densité de l'eau. Probablement une partie de la masse du Soleil est gazeuse. Cependant le contour apparent de cette masse gazeuse, portée à une très haute température, présente une régularité singulière.

D'après les récentes expériences de M. Le Châtelier et d'autres savants concernant les températures élevées, on peut admettre que la température du Soleil à la surface est dans les environs de 7000°.

Depuis les temps les plus reculés, le rayonnement solaire n'a pas varié d'une manière sensible, la constance des espèces végétales dans les différentes latitudes le prouve. Comment l'intensité du rayonnement peut-elle se maintenir? Cela n'est possible qu'en conséquence d'un certain mécanisme encore mal connu. On ne peut comparer le soleil ni à un corps en combustion, ni à un corps incandescent qui se refroidit: la provision de chaleur serait épuisée depuis longtemps.

Mayer, l'un des créateurs de la thermodynamique, a supposé qu'à l'exemple de ce qui a lieu pour la Terre, de nombreux météores rencontrent le soleil; par la transformation de leur force vive en chaleur, le soleil pourrait récupérer une partie de ce qu'il dépense.

On admet généralement avec Helmholtz, que le Soleil, résidu de la nébuleuse solaire, effectue en se contractant un certain travail mécanique qui se transforme en chaleur.

L'explication de Mayer peut avoir sa valeur pour la période de condensation de la nébuleuse.

10. Etude de la surface du Soleil. Observations des taches.

On peut faire remonter à Galilée les premières études sur les taches solaires. En recevant sur un écran l'image du soleil qui avait traversé une lunette, il put voir les taches, formées d'un noyau sombre entouré d'une pénombre, assez bien limitée; il jugea qu'elles appartenaient à la surface du Soleil et expliqua leur mouvement par la rotation de cet astre, qui les soustrait et les ramène alternativement à notre vue.

Depuis lors, l'étude de la surface du Soleil a permis de constater que les taches apparaissent presque exclusivement dans deux zones de part et d'autre de l'équateur solaire entre 10° et 35° de latitude héliocentrique. La durée de rotation apparente du Soleil est d'environ 27 jours. Il faut remarquer que la rotation n'est pas la même pour les taches, à des distances différentes de l'équateur; il y a accélération quand on se rapproche de l'équateur (Carrington, Faye).

Sur le corps visible du Soleil, qu'on appelle photosphère, on distingue encore des plages plus brillantes que le reste : ce sont les facules, surtout nombreuses dans le voisinage des tâches. Des granulations (grains de riz ...) recouvrent presque toute la surface du Soleil.

La photographie est utilisée aujourd'hui avec l'œil pour relever les détails de la surface solaire. Mention spéciale doit être faite des photographies obtenues à Meudon par M. Janssen.

11_ Observations faites pendant les éclipses totales. _ Les observations de ces éclipses, suivies avec la plus grande attention depuis l'éclipse célèbre de 1842 ont conduit à ceci : Quand le disque du Soleil est recouvert entièrement par celui de la Lune, on aperçoit des flammes roses, en forme de jets ou de panaches qui s'appuient sur le bord du Soleil et s'élèvent parfois à des hauteurs comparables à une fraction notable du rayon du Soleil. Ces flammes font partie d'une couche rose très peu épaisse, qui entoure le Soleil et que l'on nomme chromosphère. Cette sorte d'atmosphère est peu élevée sur la plus grande partie de la surface, sauf aux points où elle est soulevée pour former les protubérances. Enfin, on aperçoit des jets de lumière blanche s'étendant beaucoup plus loin, formant ce que l'on nomme la Couronne ou l'atmosphère coronale.

La figure et l'intensité des protubérances et de la Couronne varient beaucoup d'une éclipse à l'autre. Les facules, les taches et les protubérances sont des manifestations de l'activité qui règne à la surface du Soleil. Le régime de cette activité est périodique (période de 11 ans environ). Dans la même période il y a une oscillation des tâches dans les deux zônes solaires symétriques entre 10° et 35° (Spœrer).

Les variations du magnétisme terrestre dépendent de la même période de 11 ans.

12_ Résultats de l'étude spectroscopique de l'éclipse du 18 Août 1868 _ Lors de cette éclipse visible dans l'Inde, le spectroscope montra (Janssen, Rayet) les raies brillantes de l'hydrogène dans les protubérances. Leur spectre contenait en outre une raie brillante dans le jaune, que l'on appelle la raie D_3 parce qu'elle est très voisine des deux raies D du sodium. Cette raie qui n'appartient pas à l'hydrogène fut alors attribuée à un corps hypothétique l'hélium.

La propriété de la chromosphère et des protubérances d'avoir un spectre formé de quelques raies fines et fortes permet (Janssen, Lockyer) de les reconnaître en temps ordinaire, en dehors des éclipses, bien qu'elles soient invisibles avec la simple lunette. En effet, l'illumination de l'atmosphère très vive surtout dans le voisinage du Soleil, masque la chromosphère. Mais si l'on fait passer la lumière du bord solaire dans un spectroscope, la partie qui correspond à notre atmosphère est étalée et diminue d'éclat tandis que les raies fines brillantes de la chromosphère et des protubérances gardant leur éclat se détachent sur le fond continu affaibli.

Cette méthode a permis de faire depuis lors l'examen journalier de la chromosphère et des protubérances, tant sous le rapport des formes que sous le rapport des vitesses, en utilisant le principe de Döppler - Fizeau.

13 - Liens de l'Analyse spectrale du Soleil avec la Chimie. Recherche de nouveaux éléments par l'intermédiaire du Soleil. - Cette circonstance que le Soleil a fait connaître les raies de l'hydrogène plus facilement que les expériences de laboratoire a été déjà signalée.

La raie D_3 de l'hélium a été identifiée récemment par le chimiste Ramsay, l'un des auteurs de la découverte de l'Argon, avec un élément terrestre contenu dans un minéral rare, la clévéite. Le gaz de la clévéite, étudié dans le laboratoire avec des tubes à vide, a montré d'autres raies qui ont pu être identifiées avec des raies importantes de l'atmosphère solaire (Deslandres, Lockyer).

L'hypothèse de Laplace pour la formation des planètes conduit à admettre la similitude de leur composition: le spectre de la Terre supposée portée à la température du Soleil ressemblerait sans doute au spectre du Soleil.

Les raies solaires, d'origine inconnue encore, et qui sont en grand nombre peuvent donc probablement appartenir à de nouveaux éléments terrestres; de sorte que les travaux récents à l'Université John Hopkins, à Baltimore inspirés par M. Rowland, pour comparer le spectre solaire avec les spectres des éléments terrestres, au moyen de la photographie, en employant une grande dispersion, promettent à la Chimie la découverte de nouveaux éléments.

14. Photographie des raies spectrales dans l'ultra-violet. Nouvelles recherches sur l'atmosphère du Soleil.

Poursuivies simultanément par M. Hale, à Chicago et M. Deslandres à Paris, elles tirent leur origine de la remarque que les raies H et K (calcium) des protubérances solaires sont au moins aussi intenses que celles de l'hydrogène utilisées dans la méthode d'observation oculaire (Janssen, Lockyer), et se prêtent aisément à un relevé photographique.

Les deux auteurs ont remarqué que ces mêmes raies H et K se retrouvent aussi brillantes sur le disque même du Soleil, au dessus des facules, et décèlent par suite sur la surface même du Soleil les masses gazeuses qui, jusqu'à présent avec l'observation oculaire, avaient pu être étudiées seulement au bord extérieur.

M. M. Hale et Deslandres ont imaginé des appareils automatiques spéciaux qui font connaître séparément les formes et aussi les vitesses de ces gaz brillants.

15. Résumé de nos connaissances sur le soleil. Problèmes en suspens.

En résumé (*), le Soleil est une vaste machine thermique organisée de manière à rayonner vers toutes les régions de l'espace une énorme provision de chaleur avec une constance et une régularité, qui doivent paraître aussi exceptionnelles relativement à ce que nous savons des étoiles, que l'est la configuration du système solaire relativement aux systèmes d'étoiles.

Le foyer est la masse même de l'astre, dotée, dès l'origine, d'une prodigieuse quantité de Calorifique que la contraction progressive de la masse entière contribue à alimenter. La source de froid est l'espace céleste qui ne reçoit que la radiation des autres astres. Le lieu de condensation, c'est la photosphère où la température relativement froide est de 7000° environ.

Le jeu de la machine nécessite une circulation du foyer à la photosphère et un retour des matériaux refroidis au foyer; mais il n'est pas actuellement possible de préciser les détails de ce mouvement de circulation.

Grâce à l'étude des éclipses totales et à l'emploi du spectroscope, on est arrivé à obtenir comme une coupe des couches successives du Soleil. Alors que le Soleil n'est pas encore complètement éclipsé par la Lune on aperçoit la Couronne où se

(*) H. Faye Sur l'origine du Monde. 3ième Edition, p. 251

trouvent les matériaux les plus légers (hydrogène hélium), ensuite la chromosphère et les flammes des protubérances dépassant parfois beaucoup la chromosphère ; elles rappellent les flammes qui surmontent un feu de charbon. le spectroscope indique la présence de l'hydrogène et de l'hélium ainsi que des métaux (calcium sodium). Un instant après la disparition du bord solaire, c'est-à-dire de la photosphère se présente, dans des conditions favorables, le phénomène de l'éclair : la couche de vapeurs métalliques incandescentes qui par son absorption produit le renversement des raies est accusée par des raies brillantes dans le spectre ; mais le phénomène ne dure que peu de temps à cause de la faible épaisseur de cette couche de vapeurs.

Ce qu'on sait, dans l'ensemble des variations périodiques concordantes des tâches, des facules, des protubérances et de la Couronne ainsi que des variations périodiques du magnétisme terrestre doit sans doute être rattaché à la circulation à l'intérieur du Soleil ; sans doute aussi l'accélération qui a lieu (en moyenne) pour les régions équatoriales ; mais sur beaucoup de points nos connaissances auraient besoin d'être précisées. Ainsi :

Une tache ne comporte pas toujours une excavation par rapport à la photosphère, comme on l'a longtemps admis. la température dans une tache peut être inférieure mais parfois aussi supérieure à celle de la photosphère du voisinage ; il n'est pas démontré encore que la loi d'accélération pour les régions équatoriales soit applicable à toutes les latitudes et les résultats fournis, sur ce point, par les tâches, les facules et aussi les mesures spectroscopiques aux latitudes supérieures à 35° ne sont pas définitifs.

On ne peut encore rien dire de positif quant à l'action du Soleil sur la météorologie terrestre ou à l'existence d'une radiation électrodynamique.

A l'égard de la Couronne, observable seulement lors des éclipses totales, on possède peu de renseignements ; il faudrait pouvoir l'observer en dehors des éclipses.

Notions sommaires sur l'étude physique des astres autres que le Soleil.

16. L'éloignement de ces astres et la faiblesse de leur lumière ne permet pas, en général une étude approfondie comme dans

le cas du Soleil. En tout cas il faut se servir d'instruments de grande ouverture capables de concentrer une quantité de lumière suffisante.

Le spectroscope entre les mains du Dr Huggins a montré en 1864, qu'on avait affaire dans les nébuleuses non résolubles, pour une moitié au moins, à des gaz incandescents. On distingue une raie verte d'origine encore inconnue, les raies de l'hydrogène, la raie D_3...

Le même savant a vu depuis dans les spectres de quelques étoiles de la Constellation d'Orion des raies s'étendant plus ou moins dans la matière adjacente de la nébuleuse : preuve que ces étoiles sont associées réellement avec la matière nébuleuse. Les photographies des Pléïades, obtenues par MM. Henry à l'observatoire de Paris, ont révélé d'autre part l'existence de filaments nébuleux établissant des communications entre les étoiles ; cela s'accorderait avec les idées d'Herschel sur la condensation des nébuleuses.

Les spectres des planètes reproduisent le spectre solaire avec quelques bandes obscures en plus causées par l'absorption des atmosphères planétaires. Il y a identité entre le spectre de la Lune et celui du Soleil, ce qui confirme que la Lune n'a pas d'atmosphère sensible ; La méthode Döppler-Fizeau a permis de confirmer la rotation des anneaux de Saturne (Keeler, Deslandres)

Le spectre des comètes se compose le plus souvent de trois bandes brillantes ; il coïncide avec celui des hydrocarbures, avec celui du cône bleu du bruleur Bunsen et de la base bleuâtre des bougies.

Les étoiles ont été divisées en trois classes principales quant à leurs spectres.

Etoiles blanches ou azurées telles que Sirius ; petit nombre de raies larges dues surtout à l'hydrogène.

Etoiles jaunes (dont le Soleil offre le type) : raies fines et nombreuses.

Etoiles rouges ou orangées telles que α Hercule : spectres cannelés.

Pour les étoiles comme pour le Soleil, les raies sont généralement sombres. En revanche, dans le cas des étoiles temporaires, dont la production semble devoir être rapportée à des explosions, à des collisions, et pour beaucoup d'étoiles variables, on a les raies

brillantes des protubérances solaires. Une grande analogie existe entre le spectre de la chromosphère et celui de γ Cygne (Lockyer).

17. Les vitesses radiales d'un certain nombre de nébuleuses ont été déterminées (Keeler) par la méthode Döppler-Fizeau; elles ont été trouvées de même ordre que celles des étoiles: ce qui cadre avec ce qu'on vient de dire.

L'application du principe Döppler-Fizeau a donné lieu récemment à des découvertes très intéressantes sur les mouvements orbitaux des étoiles. M. Vogel a confirmé l'explication des éclipses de l'étoile variable Algol en constatant par le déplacement des raies sur les photographies spectrales que la vitesse radiale d'Algol variait en sens inverse avant et après l'époque du minimum. On est ainsi amené à penser qu'Algol fait partie d'une étoile double, et si l'on suppose les orbites circulaires dans une première approximation, on se trouve dans les mêmes conditions qu'au N° 8 et on peut obtenir le rayon de l'orbite.

On pourrait citer d'autres découvertes du même ordre (Pickering)

On a étudié (Belopolsky-Lockyer) avec le spectroscope plusieurs étoiles variables et constaté qu'elles sont formées de plusieurs composantes brillantes et que les variations des spectres concordent avec les variations d'éclat.

La classification des étoiles par rapport à leurs spectres, la détermination des vitesses radiales au moyen de grands spectrographes retiennent actuellement l'attention des Astronomes.

Fin du Cours.



Résumé pour les planètes.

Planètes	Distance au ☉	Révolutions	Satellites	Remarques
Mercure	0.39	88 jours	0	
Vénus	0,72	225 "	0	
Terre	1,00	1 an	1 = Lune	
Mars	1,52	1 an 88	2 (1877)	Eclat rouge

Zône des petites planètes

Le 13 août 1898 on a trouvé (à Berlin et à Nice) une petite planète entre Mars et la Terre.

Jupiter	5,20	12 ans	4 (5ième 1892)	la plus grosse planète, $\frac{1}{1000}$ du Soleil
Saturne	9,54	29 "	8	Anneau
Uranus	19,2	84 "	4	Découverte par Herschel (1781)
Neptune	30,	165 "	1	" par Le Verrier (1846)

École Polytechnique. 1902-1903

1e Division.

Astronomie (Supplément au Cours)

Nombres usuels (en chiffres ronds)

Terre

Rayon de la Terre supposée sphérique	6400 Kilomètres
Aplatissement $\frac{a-b}{a}$	$\frac{1}{300}$
Masse (celle du ☉ étant 1)	$\frac{1}{330.000}$
Densité moyenne (celle de l'eau étant 1)	5,5
Accélération dans la chute des Corps (Paris)	9m 81
Réfraction astronomique pour z = 45	1'
Réfraction astronomique à l'horizon	34'

Soleil

Obliquité de l'écliptique	23° 1/2
Excentricité de l'orbite	$\frac{1}{60}$
Année tropique	365,2422 (jours sol. moyens)
Précession annuelle	50"
Année sidérale	365,256 (jours sol. moyens)
Maximum de l'équation du temps	17 minutes
Excès du jour solaire moyen sur le jour sidéral	3m 56s

Parallaxes

Distance moyenne de la Terre à la Lune	60 r
au Soleil	24000 r
Parallaxe horizontale équatoriale ☉	8",81
☾	57'

Lune.

Inclinaison du plan de l'orbite sur l'écliptique.	5°
Excentricité de l'orbite	$\frac{1}{18}$
Lunaison ou révolution synodique . . .	29^{j} 1/2
Révolution sidérale	27^{j} 1/3
Révolution sidérale du noeud ascendant . .	18^{ans} 2/3
Période chaldéenne des éclipses	18^{ans} 11 jours = 223 lunaisons
Masse de la Lune (celle de la terre étant 1) . . -	$\frac{1}{81}$

Eclipses.

Demi-diamètre apparent ☉ } Demi-diamètre apparent ☾ }	16′
Rapport des distances Terre à ☾ et ☉	$\frac{1}{400}$
Rapport des rayons des sphères de ☾ et ☉ . .	$\frac{1}{400}$
Rayon de la Lune	$\frac{3}{11}$ r

Vitesse de la lumière - Aberration.

Vitesse de la lumière (par seconde)	300,000 Kilomètres
Constante d'aberration $\frac{v}{V} \times 206265''$ . . .	20″45 (Struve)
Vitesse v. de la Terre dans son orbite (par seconde).	30 Kilomètres.

$\left(v = \frac{1}{10000} V\right)$.

École Polytechnique. 1902-1903.

1e Division.

Cours d'Astronomie et de Géodésie.

Table des Matières.






UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 112079857